F. DANI H. BOUKHAROUB Y. EL HYHY

NOUVEAU

Rapide Way

EXERCICES ET PROBLÈME RÉSOLUS

1er Cycle Universitaire
Classes Préparatoires

TOME 1

Electricite Optique

Analyse Algebre

Chimie Générale

SEMESTRE: 2

موقع طريق المعرفة

www.rapideway.org

Remerciement :

Nous vous présentons ce manuel dans sa deuxième partie, qui comprend des séries des examens de l'année précédente, accompagné par des modèles de solutions rédigées d'une façon simple et bien détaillée.

Ce support sera utile pour les étudiants de 1er année universitaire pour les filières de physique, chimie et mathématique de faculté des sciences, de sciences et technique ou de classe préparatoire aux grandes écoles.

Il contient à la fois L'électricité, L'optique géométrique, la chimie générale, l'analyse et l'algèbre.

C'est avec un réel plaisir que nous avons effectué ce modeste travail pour que les étudiants : puissent avoir une idée préconçue sur le niveau et le degré de difficulté des examens. Puissent bien assimiler leurs cours. Puissent avoir des supports conçus afin de bien se préparer aux examens, et d'avoir de bonnes notes par la suite.

Nous conseillons les étudiants de bien assimiler leurs cours de chaque matière et aussi de bien travailler les séries de travaux dirigés avant d'aborder la résolution des examens dont le but de bien comprendre les concepts et pour que vous puissiez reconnaitre votre niveau.

Nos remerciements et notre gratitude s'adressent à tous les collègues qui ont participé à la rédaction de tous les documents, merci à tous.

Nous tenons à remercier tous les amis qui ont contribué de loin ou de proche avec leurs encouragement pour la sortie de ce modeste effort sans oublier de remercier tous les fidèles de site RapideWay.org.

Très important :

Si vous souhaitez nous écrire, On vous propose les adresses suivantes :

- Notre adresse électronique : rapideway@gmail.com.
- Notre site web www.rapideway.org
- Notre page Facebook. www.facebook.com/rapideway

En particulier, nous remercions chaleureusement tous ceux d'entre vous qui prennent la peine de nous signaler les petites erreurs qu'ils trouvent dans nos documents.

Nous autorisons quiconque le souhait à placer sur son site un lien vers nos documents, mais on n'autorise personne à les héberger directement. On interdit par ailleurs toute utilisation commerciale de nos documents toute modification ou reproduction sans notre accord.

ELECTRICITÉ 1 :

Contrôle N : 1 Electricité 1 Filière SMPC/SMA 2006-2007 FSSM :

Question de cours :

Rappeler Les propriétés d'un conducteur en équilibre électrostatique.

Exercice 1 : système de quatre charges ponctuelles.

Soient quatre charges ponctuelles disposées au sommet d'un carré dont la longueur du diagonal est **2a.**

1. Déterminer le champ $\vec{E}$ et le potentiel **V** électrostatique au centre $O(0,0)$ du carré dans les cas suivants :

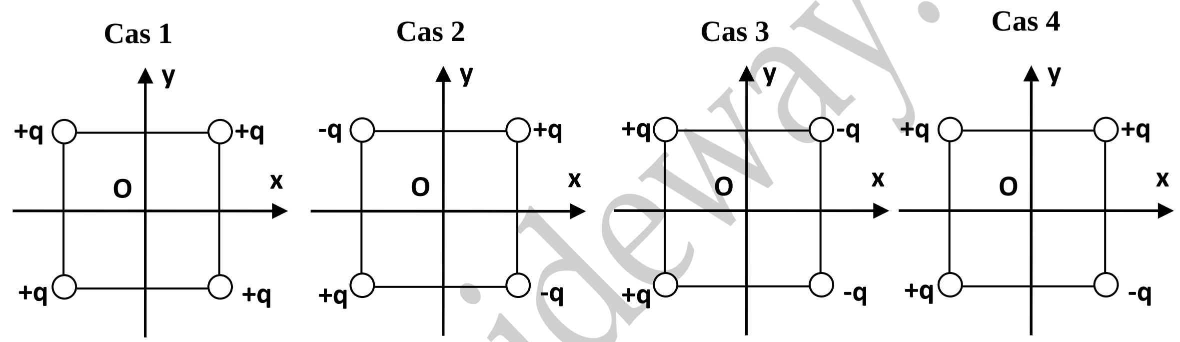


Figure 1

Représenter $\vec{E}(O)$ dans chacun des ces cas.

Exercice 2 : Distribution cylindrique de charges.

On considère un cylindre de rayon R, de longueur infinie, chargée uniformément en surface par une densité surfacique de charges $\sigma(\sigma > 0)$. A laide du théorème de Gauss, ou désire déterminer le champ électrostatique $\vec{E}$ en tout point M de l'espace, crée par cette distribution. M est un point situé à la distance r de l'axe (Oz) du cylindre et repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z)**(voir figure).**

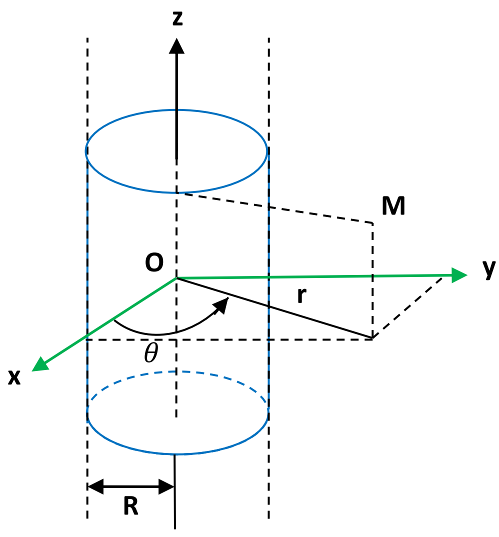


Figure 2

1. Par des considérations de symétrie et d'invariances, déterminer la direction de $\vec{E}(M)$ et les variables dont il dépend.
2.
   a. définir précisément la surface de Gauss que vous utilisez (en justifiant votre choix).
   b. Déterminer le champ $\vec{E}(M)$ en tout point de l'espace $(r < R \; et \; r > R)$.
3. En déduire le potentiel $V(M)$ pour tous les points M de l'espace $(r < R \; et \; r > R)$ (on prendra comme origine des potentiels $V = V_0$ en$r = 0$).
4. Tracer les courbes de variations $E(r)$ et $V(r)$ en fonction de r (où $E(r)$ est la norme du champ). Conclure.
5. Quelles sont les lignes de champ et les surfaces équipotentielles pour cette distribution de charges

Corrigée de Contrôle N : 1 Electricité 1 Filière SMPC/SMA 2006-2007 FSSM :

Question de cours :

Les propriétés d'un conducteur en équilibre électrostatique sont :

- Le champ électrique est nul à l'intérieur d'un conducteur en équilibre; $\vec{E}(M) = \vec{0}$
- La densité volumique de charges à l'intérieur du conducteur est nul ; $\rho = 0$
- Le potentiel est constant en tout point du conducteur $V = cte$.

Exercice 1 :

1. Détermination de $\vec{E}$ et **V** au centre $O(0,0)$ dans les cas suivants :

a. 1[er] cas :

Soient $\vec{E}_A(O),\ \vec{E}_B(O),\ \vec{E}_C(O),\ \vec{E}_D(O)$ les champs crées en O respectivement par les charges $+q, +q, +q\ et + q$

On a $\vec{E}_A(O) = \vec{E}_B(O)$ et $\vec{E}_C(O) = \vec{E}_D(O)$

Le champ résultant $\vec{E}(O)$ est donc

$$\vec{E}(O) = \vec{E}_A(O) + \vec{E}_B(O) + \vec{E}_C(O) + \vec{E}_D(O)$$

$$= \vec{E}_A(O) - \vec{E}_A(O) + \vec{E}_C(O) - \vec{E}_c(O)$$

$$\vec{E}(O) = \vec{0}$$

- le potentiel $\boldsymbol{V}(\mathbf{0})$:
  Le potentiel électrostatique défini par : $V_A(O) = \frac{+q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{AO}$

On a $V(O) = V_A(O) + V_B(O) + V_C(O) + V_D(O)$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{AO} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{BO} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{CO} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{DO} \text{ Avec } OA = OB = 0C = OD = a$$

$$V(O) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}$$

$$= \frac{4q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}$$

D'ou $V(O) = \frac{q}{\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}$

b. 2[ème] cas :$(-q, +q, +q\ et - q)$

- Le champ $\vec{E}(O)$
  Le champ $\vec{E}_A(O)$ défini par : $\vec{E}_A(O) = \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_{AO}}{AO^2}$;$\vec{u}_{AO}$:vecteur unitaire de AO

Donc $\vec{E}(O) = \vec{E}_A(O) + \vec{E}_B(O) + \vec{E}_C(O) + \vec{E}_D(O)$

$$= \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_{AO}}{AO^2} + \frac{q_B}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_{BO}}{AB^2} + \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_{CO}}{AC^2} + \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_{DO}}{AD^2}$$

Avec $\begin{cases} \vec{u}_{AO} = -\vec{u}_{CO} \\ \vec{u}_{BO} = -\vec{u}_{DO} \\ OA = OB = 0C = OD = a \end{cases}$

$$\vec{E}(O) = \frac{+q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^2}\vec{u}_{AO} - \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^2}(-\vec{u}_{AO}) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^2}\vec{u}_{BO} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^2}(-\vec{u}_{BO})$$

$\vec{E}(O) = \vec{0}$

- le potentiel $\boldsymbol{V(0)}$:

On a $V(O) = V_A(O) + V_B(O) + V_C(O) + V_D(O)$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{AO} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{BO} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{CO} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{DO} \text{avec} OA = OB = 0C = OD = a$$

$$= \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}$$

$$V(O) = 0$$

c. 3ème cas :$(+q, -q, -q \ et + q)$

- Le champ résultant $\vec{E}(O)$ est donc

$\vec{E}(O) = \vec{E}_A(O) + \vec{E}_B(O) + \vec{E}_C(O) + \vec{E}_D(O)$

$$= \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_{AO}}{AO^2} + \frac{q_B}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_{BO}}{AB^2} + \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_{CO}}{AC^2} + \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_{DO}}{AD^2}$$

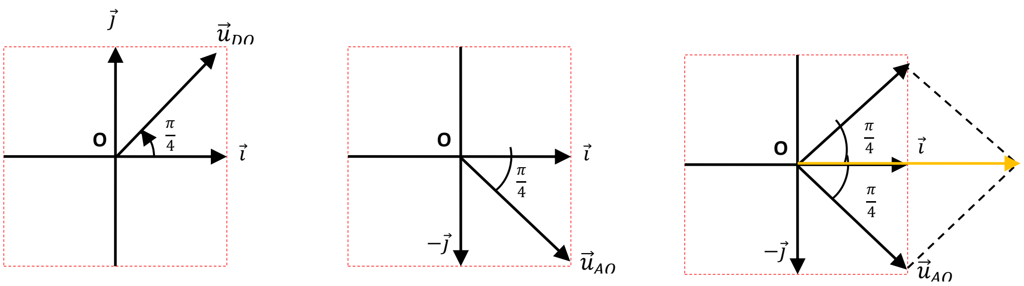
Avec $\begin{cases} \vec{u}_{AO} = -\vec{u}_{CO} \\ \vec{u}_{BO} = -\vec{u}_{DO} \\ OA = OB = 0C = OD = a \end{cases}$

$$\vec{E}(O) = \frac{+q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^2}\vec{u}_{AO} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^2}(-\vec{u}_{AO}) + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^2}\vec{u}_{BO} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^2}(-\vec{u}_{BO})$$

$$\vec{E}(O) = 2\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^2}\vec{u}_{AO}\right) - 2\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^2}\vec{u}_{BO}\right)$$

$\vec{E}(O) = 2\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^2}\vec{u}_{AO}\right) + 2\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^2}\vec{u}_{DO}\right)$ Avec $\vec{u}_{DO} = -\vec{u}_{BO}$

$$\vec{E}(O) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^2}(\vec{u}_{AO} + \vec{u}_{DO})$$



$\vec{u}_{DO} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{\imath} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{\imath}$

$\vec{u}_{DO} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}$

$\vec{u}_{AO} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{\imath} - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{\imath}$

$\vec{u}_{AO} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}$

$\vec{u}_{DO} + \vec{u}_{AO} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{\imath} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{\imath} + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{\imath} - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{\imath}$

$\vec{u}_{DO} + \vec{u}_{AO} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath} = \sqrt{2}\vec{\imath}$

Figure 3

D'où $\vec{E}(O) = \frac{\sqrt{2}q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^2}\vec{\imath}$

- le potentiel $\boldsymbol{V(0)}$:

On a $V(O) = V_A(O) + V_B(O) + V_C(O) + V_D(O)$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{AO} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{BO} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{CO} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{DO} \text{ Avec } OA = OB = 0C = OD = a$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}$$

$$V(O) = 0$$

d. 4ème cas :$(+q, +q, -q\ et + q)$

- Le champ résultant $\vec{E}(O)$ est donc

$\vec{E}(O) = \vec{E}_A(O) + \vec{E}_B(O) + \vec{E}_C(O) + \vec{E}_D(O)$

$\vec{E}(O) = \vec{E}_A(O) + \vec{E}_A(O) + \vec{E}_B(O) - \vec{E}_B(O)$ Car $\begin{cases}\vec{E}_A(O) = \vec{E}_c(O)\\ \vec{E}_B(O) + \vec{E}_D(O)\end{cases}$

$\vec{E}(O) = 2\vec{E}_A(O) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^2}\vec{u}_{AO}$

$Avec\ \vec{u}_{AO} = cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{\imath} - sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{\imath} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{\imath} - \vec{\jmath})$

$$\vec{E}(O) = \frac{\sqrt{2}q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^2}(\vec{\imath} - \vec{\jmath})$$

- le potentiel $\boldsymbol{V(0)}$:

On a $V(O) = V_A(O) + V_B(O) + V_C(O) + V_D(O)$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{AO} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{BO} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{CO} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{DO} avec OA = OB = 0C = OD = a$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}$$

$$V(O) = 2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}$$

Exercice 2 : Distribution cylindrique de charges.

1. la direction et le sens du champ électrostatique $\vec{E}(M)$

- la distribution admet comme plans des symétries, un plan P_1 passant par le point M et contenant l'axe zz', et un autre plan P_2 perpendiculaire à l'axe zz'.

En déduit alors que le champ $\vec{E}(M)$ est porté par l'intersection de ces plans, c'est-à-dire l'axe de direction $\vec{er} \Rightarrow \vec{E}(M) = E_r(r, \theta, z)\vec{er}$

- la distribution est invariante par toute rotation auteur de l'axe zz'

$$\vec{E}(M) = E_r(r, z)\vec{er}$$

- à distribution est invariante par toute translation selon l'axe zz'

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = E_r(r)\vec{er}$$

2.

a) choix de la surface de Gauss

Le champ $\vec{E}(M)$ est radial et constant sur un cylindre d'axe zz' et de rayon r, la surface de gauss convenable sera un cylindre de rayon r et de hauteur h.

b) le champ $\vec{E}(M)$ en tout point de l'espace

- le théorème de Gauss :

$\phi = \oiint_{S_g} \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$; ϕ:étant le flux de $\vec{E}(M)$ à travers S_g

Sg : La surface de Gauss

$Sg = S_{B_1} + S_{B_2} + S_L$; S_{b1}:surface de la 1ère base supérieure du cylindre, S_{B_2}: celle inférieur.

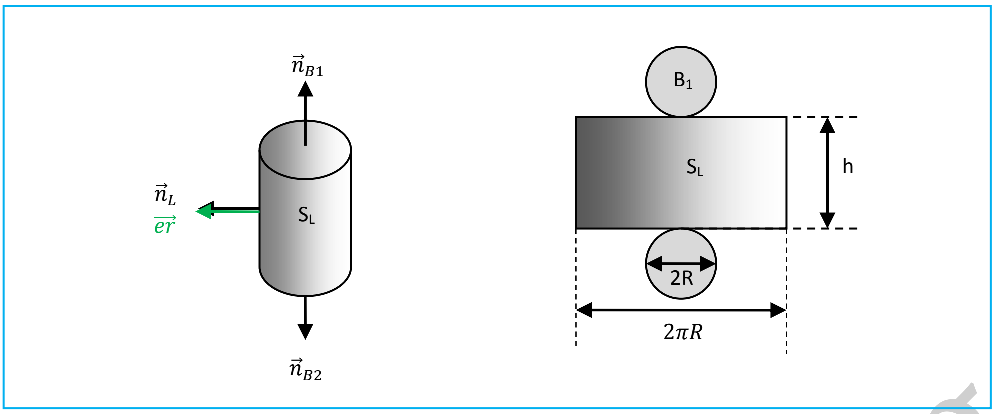


Figure 4

Donc $\phi = \oiint_{Sg} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \iint_{SB1} \vec{E}.\overrightarrow{dS} + \iint_{SB2} \vec{E}.\overrightarrow{dS} + \iint_{S} \vec{E}.\overrightarrow{dS}$

Or $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{er}$

D'où $\phi = \iint_{SB1} E_r(r)\vec{er}.dS\vec{n}_{B1} + \iint_{SB2} E_r(r)\vec{er}.dS\vec{n}_{B2} + \iint_{S} E_r(r)\vec{er}.dS\vec{n}_{L1}$

$\vec{n}_{B1} = \vec{k}, \vec{n}_{B1} = -\vec{k}, \vec{n}_L = \vec{er} \begin{cases} \vec{er}.\vec{k} = 0 \\ \vec{er}.\vec{er} = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \phi = \iint_S E_r(r).dS$, le champ $\vec{E}$ est uniforme sur un cylindre de rayon r et l'axe zz'

$$\Rightarrow \phi = \iint_{Sg} E_r(r).dS = E_r(r) \iint_{Sg} dS = E_r(r).S_L = E_r(r).2\pi rh$$

Surface du cylindre est égale à $2\pi rh$

$$\Rightarrow \phi = E(r).2\pi rh$$

- **1er cas $r < R$**(M a l'intérieur de la surface de gauss)

On a le cylindre de rayon R, de longueur infinie, chargée uniformément en **surface** par une densité surfacique de charges $\sigma(\sigma > 0)$.

Donc $Q_{int} = 0 \Rightarrow \phi = E(r).2\pi Rh = 0$ comme $2\pi Rh \neq 0 \Rightarrow E(r) = 0$

$$\vec{E}(M) = \vec{0}$$

- **2eme cas $r > R$**(M a l'extérieur de la surface de gauss)

Donc $Q_{int} = \iint \sigma.dS$

Les charges uniformément réparties sur la surface du cylindre donc $\sigma = cte$

D'où $Q_{int} = \sigma \iint dS = \sigma 2\pi \boldsymbol{R}h$; on prend ***R***car, les charge sont au surface de cylindre de rayon R.

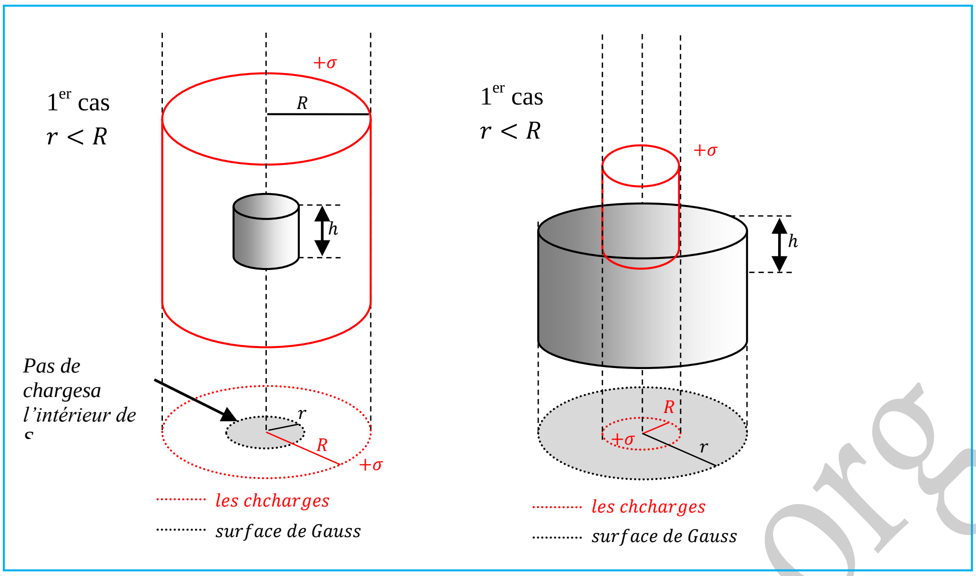


Figure 5

D'où $\phi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = E(r).2\pi Rh \Rightarrow \frac{\sigma 2\pi Rh}{\varepsilon_0} = E(r).2\pi rh \Rightarrow E(r) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}\vec{er}$$

$$\text{Finalement}\begin{cases} 0 & si \quad r < R \\ \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\frac{1}{r} & si \quad r > R \end{cases}$$

3. le potentiel $V(M)$ pour tous les points M de l'espace

On a $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\, V(M)$

Le gradient en coordonnée cylindrique est : $\overrightarrow{grad}\, V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{er} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{e\theta} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$

Puisque $\vec{E}(M)$ ne dépend pas de θ et z on a alors $E(r)\vec{er} = -\frac{\partial V(M)}{\partial r}\vec{er}$

$$E(r) = -\frac{dV(M)}{dr} \Rightarrow \quad dV(M) = -E(r)\,dr$$

- **1er cas** $\boldsymbol{r} < R$
  On a $E(r) = 0 \Rightarrow \quad dV(M) = 0 \Rightarrow V(M) = \text{cte dans l'inter val } [0, R[$

D'après les conditions au limite pour $r = 0 \Rightarrow V = V_0$

D'où $V(M) = V_0$ on le note $V_{int}(M) = V_0$

2eme cas $\boldsymbol{r} > R$

On a $\vec{E}(M) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}\vec{er}$ et $dV(M) = -E(r)\,dr$

$$V(M) = \int dV = \int \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}dr = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\int\frac{dr}{r} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln(r) + cte$$

on le note $V_{ext}(M) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln(r) + cte$

Pour déterminer la constante en utilisant la continuité du potentiel pour $\boldsymbol{r = R}$

On a $V_{int}(r = R) = V_{ext}(r = R) \Longrightarrow V_0 = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln(R) + cte \Longrightarrow cte = V_0 - \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln(R)$

$$\Longrightarrow V_{ext}(M) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln(r) + V_0 - \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln(R)$$

$$\text{D'où}\boldsymbol{V_{ext}(M) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R}{r}\right) + V_0}$$

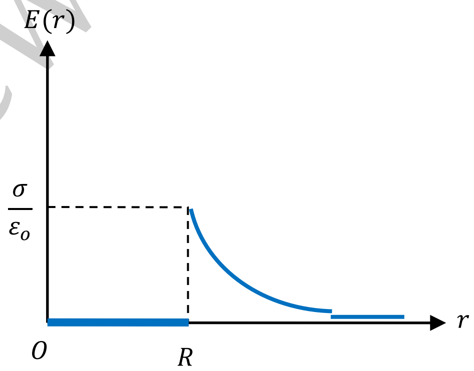
4. Représentation de $E(r)$ et $V(r)$ en fonction de r

- **Pour la fonction $\boldsymbol{E(r)}$**

On a $\begin{cases} 0 & si\, r < R \\ \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\frac{1}{\boldsymbol{r}} & si\, r > R \end{cases}$

Pour $r = R \Longrightarrow \quad E(r = R) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$$\lim_{n\to\infty} E(r) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\frac{1}{\boldsymbol{r}} = 0$$



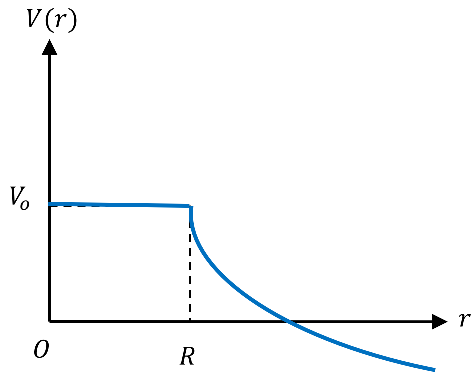
- **Pour la fonction $\boldsymbol{V(r)}$**

On a $\begin{cases} V_0\, si\, r < R \\ \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R}{r}\right) + V_0\, si\, r > R \end{cases}$

Pour $r = R \Longrightarrow \quad V(r = R) = V_0$

$$\lim_{n\to\infty} V(r) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R}{r}\right) + V_0\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1}{-\infty}\right) = \ln(0^-) = -\infty$$



5. les lignes de champ et les surfaces équipotentielles

- les lignes de champ :

Les lignes de champ sont des droites qui partent de la surface du cylindre chargé, leur prolongement passe par l'origine.

- **les surfaces équipotentielles**

$$\Longrightarrow \quad V(M) = cte$$

  - à l'intérieur $V(M) = cte = V_0$
  - à l'extérieur $V(M) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R}{r}\right) + V_0 = C_1 \Longrightarrow \ln\left(\frac{R}{r}\right) = \frac{\varepsilon_0}{\sigma R}(C_1 - V_0) = C_2$

$$\ln(R) - \ln(r) = C_2 \Longrightarrow \ln(r) = \ln(R) - C_2 = C_3 \Longrightarrow r = e^{C_3} = cte$$

$r = cte$ ⟹les surfaces équipotentielles sont des cylindres de même axe que la distribution.

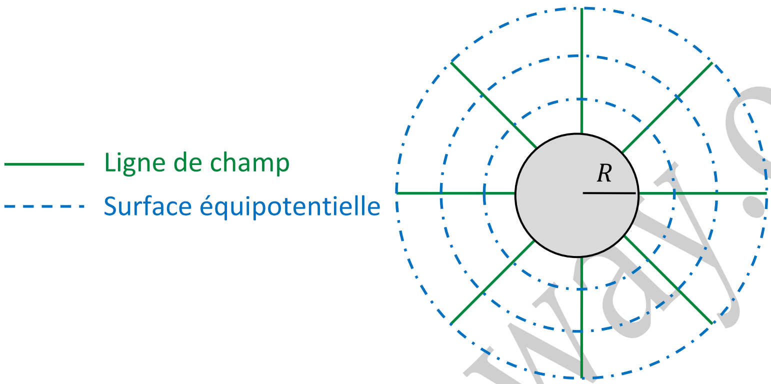


Figure 6

Contrôle N : 1 Electricité 1 Filière SMPC/SMA 2005-2006 FSSM :

Exercice : 1

Sur un axe $x'Ox$ sont placees : une charge ponctuelle q_1 au point O, une charge ponctuelle q_2 au point A d'abscisse $x = a$ $(a > 0)$.

1) Donner l'expression de la force électrostatique agissante sue une charge ponctuelle q_3 placée sur l'axe au point B d'abscisse $x = \frac{a}{2}$.

On donne : $q_1 = 3q, q_2 = -2q$ et $q_3 = q$ $avec$ $q > 0$

2) Donner les expressions du champ et du potentiel électrostatiques crées par $q_1$et q_2 au point B.

Exercice : 2

A- On considère une spire circulaire de centre O et de rayon R, uniformément chargée avec une densité de charge linéique $\lambda(\lambda > 0)$

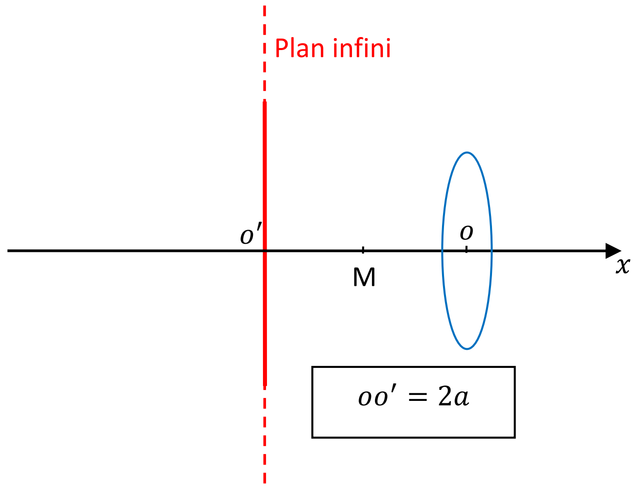
a. Sans faire de calcul, donner la direction du champ électrique $\vec{E}_s(M)$ en un point M de l'axe de la spire tel queOM = x. justifier votre réponse.

b. Déterminer le champ électrostatique$\vec{E}_s(M)$ et le potentiel $V_S(M)$ au point M.

B- Soit un fil infini uniformément chargé avec une densité de charge linéique$-\lambda$.

a. En utilisant al symétrie de la distribution, quelle est la distribution du champ électrique $\vec{E}_f(M)$ en un point M situé a une distance r du fil. Justifier votre réponse.

b. Par application du théorème de gauss, déterminer le électrique $\vec{E}_f(M)$ en un point M. En déduire le potentiel $V_f(M)$.on donne $V_r(r = 0) = 0$



C- On place le fil infini perpendiculairement a l'axe principale de la spire circulaire et a une distance 2a de celle-ci (voire la figure).

a. Déterminer le champ $\vec{E}$ crée par le fil infini et la spire circulaire au point M tel que M est au milieu de $O'O$.

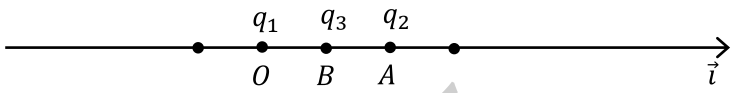
b. Déterminer le potentiel V(M).

Corrigée de Contrôle N : 1 Electricité 1 Filière SMPC/SMA 2005-2006 FSSM

Exercice : 1

I) L'expression de la force électrostatique $\vec{F}_b$

On a $\vec{F}_B = \vec{F}_{q_1q_3} + \vec{F}_{q_2q_3}$



On a $\vec{F}_{q_1q_3} = \frac{q_1q_3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{OB}}{OB^3} = \frac{q_1q_3\frac{a}{2}}{4\pi\varepsilon_0\ (\frac{a}{2})^3}\vec{\imath} = \frac{q_1q_3}{\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{\imath}$

Avec $q_1 = 3q \ et\ q_3 = q$

$$\rightarrow \vec{F}_{q_2q_3} = \frac{-3q^2}{\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{\imath}$$

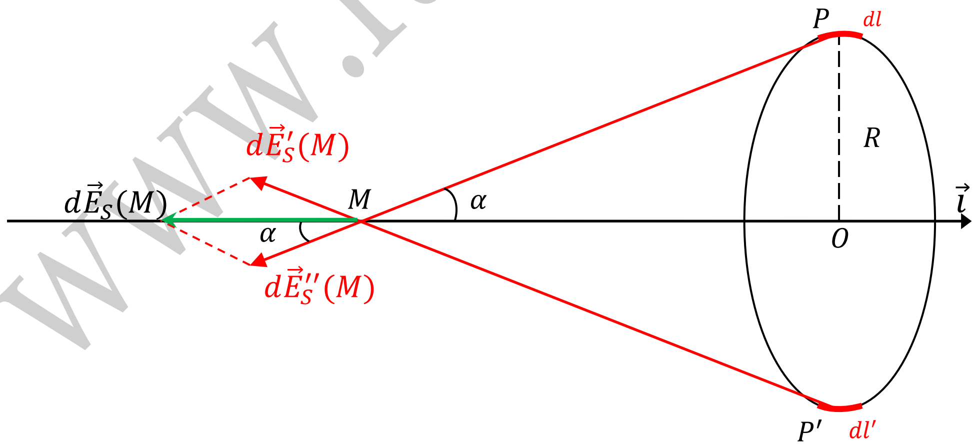
- $\vec{F}_{q_2q_3} = \frac{q_2q_3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{AB}}{AB^3} = \frac{q_2q_3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{a}{2}}{(\frac{a}{2})^3}\vec{\imath} = \frac{q_2q_3}{\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{\imath} \quad avec{:}\ q_2 = -2q\ et\ q_3 = q$

$$\Longrightarrow \vec{F}_{q_2q_3} = \frac{-2q^2}{\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{\imath}$$

$$donc\ F_B = \frac{3q^2}{\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{\imath} - \frac{2q^2}{\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{\imath} = \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 a^2}(3-2)\vec{\imath} = \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{\imath}$$

II) L'expression du champ et du potentiel :

a) Pour le champ



On a $\vec{F}_B = q_B\vec{E}_B = q_B\vec{E}_B \Longrightarrow \vec{E}_B = \frac{\vec{F}_B}{q_B}$

$$\Longrightarrow \vec{E}_B = \frac{q^2}{q\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{\imath} avec{:}\ q_3 = q$$

$$\vec{E}_B = \frac{q}{\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{\imath}$$

b) Pour le potentiel V_B

On a $V_B = V_1 + V_2$

$$\text{avec} V_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 OB} \; et V_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 AB}$$

Or $q_1 = 3q$; $q_2 = -2q$; $OB = \frac{a}{2}$; $AB = \frac{a}{2}$.

D'ou $V_B = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0(\frac{a}{2})} - \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0(\frac{a}{2})} = \frac{3q}{2\pi\varepsilon_0 a} - \frac{2q}{2\pi\varepsilon_0 a}$

$V_B = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a}(3-2) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a}$.

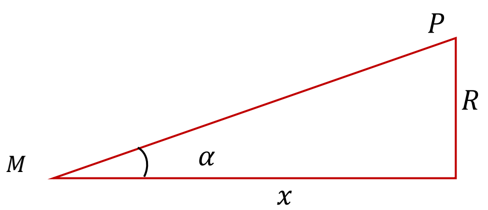
Exercice : 2

I)

i) La direction du champ électrique $\vec{E}_s$ en M, par raison de symétrie le champ électrostatique crée par la spire et porter par l'axe ox. En effet, deux élément de charge dq de longueur dl centre en P et P' symétrique par rapport a (OX), créent en M deux champs élémentaire $d\vec{E}_S(M) et \vec{E}'_S(M)$ dont la résultante est portée par l'axe OX.

ii) ***Le champ électrostatique*** $\vec{E}_S(M)$.

$$d\vec{E}_S = -dE \cos\alpha\, \vec{i} = -\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\alpha}{PM^2}\vec{i}$$



Or $dq = \lambda dl et \cos\alpha = \frac{x}{PM}$

$$PM^2 = x^2 + R^2 \rightarrow PM = \sqrt{x^2+R^2}$$

$$\Rightarrow d\vec{E}_z = -\frac{\lambda dl \cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)}\vec{\imath}$$

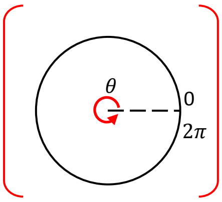
$$= -\frac{\lambda dl x \vec{\imath}}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)\sqrt{x^2+R^2}}$$

$$\left\{(x^2+R^2)\sqrt{x^2+R^2} = (x^2+R^2)(x^2+R^2)^{1/2} = (x^2+R^2)^{1+1/2} = (x^2+R^2)^{3/2}\right\}$$

$$d\vec{E}_s = -\frac{\lambda x R d\theta}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}\vec{\imath}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_s = \int d\vec{E}_s = \int_0^{2\pi} -\frac{\lambda x R d\theta}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}\vec{\imath}$$

$$\vec{E}_s = -\frac{\lambda x R}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\theta \vec{\imath}$$



$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} d\theta = [\theta]_0^{2\pi} = 2\pi - 0 = 2\pi$$

$$d'ou\ \vec{E}_s = \frac{-\lambda x R\ 2\pi}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}\vec{\imath} = \frac{-\lambda x R}{2\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}\vec{\imath}$$

Le potentiel $V_s(M)$ au point M

On a $dV_s(M) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 PM}$

Avec $dq = \lambda dl$, $PM = \sqrt{x^2 + R^2} et dl = Rd\theta$

$$\rightarrow dV_s(M) = \frac{\lambda\, Rd\theta}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2 + R^2}}$$

$$V_s(M) = \int dV_s(M) = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda\, Rd\theta}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2 + R^2}} = \frac{\lambda\, R}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2 + R^2}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\rightarrow V_s(M) = \frac{\lambda\, R}{2\varepsilon_0\sqrt{x^2 + R^2}}$$

II) Fil infini

i) La direction du champ électrostatique $\vec{E}_f(M)$la distribution admet comme plan de symétrie un plan P_1 passant par M et contient l'axe (yy') et un autre plan P_2 perpendiculaire à l'axe (yy'), en déduit alors que le champ $\vec{E}_f(M)$ est porté par l'axe de direction $\vec{e}_r$

- Le système est invariant par rotation autour du fil,
- Le système est invariant par translation parallèle au fil

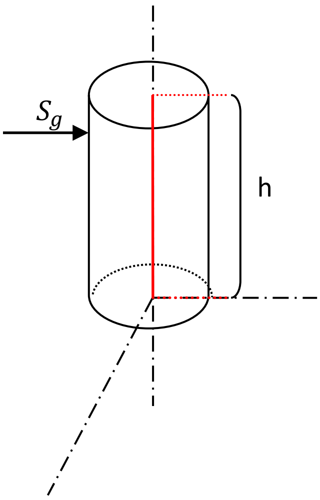
Le champ ne dépond que de la distance du point M au fil.

$$\vec{E}_f(M) = E_f(r)\vec{e}_r$$

ii) Application du théorème de gauss

- $\phi = \oiint_{sg} \vec{E}_f(M)d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$
- $surface\ de\ gauss$:

  Le champ et radial et constant sur un cylindre, la surface de gauss convenable sera un cylindre de rayon r et de hauteur h.



$$\phi = \oiint_{sg} \vec{E}_f(M)d\vec{S}$$

$$= \iint_{sb_1} \vec{E}_f(M).d\,\vec{S}_{sb_1} + \iint_{sb_2} \vec{E}_f(M).d\,\vec{S}_{sb_2}$$

$$+ \iint_{sL} \vec{E}_f(M).d\,\vec{S}_L$$

$$=\left\{\iint_{sb_1} E_f(M)\vec{e}_r.d\vec{S}_{sb_1}\vec{k}\right\}_{=0}+\left\{\iint_{sb_2} E_f(M)\vec{e}_r.d\vec{S}_{sb_2}(-\vec{k})\right\}_{=0}+\iint_{sL} E_f(M)\vec{e}_r.d\vec{S}_L$$

$$=\iint_{sL} E_f(M)\vec{e}_r.d\vec{S}_L$$

Le champ est constant sur un cylindre

$$\phi=\iint_{sL} E_f(r).dS_L=E_f(r).S_L=E_f(r).2\pi rh$$

- $Q_{int}=\int -\lambda dl=-\lambda\int_0^h dl=-\lambda h$

  Les charge sont disposer sur le segment de longueur h d'où :

$$E_f(r).2\pi rh=-\frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow E_f(r)=-\frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}\rightarrow \vec{E}_f(r)=-\frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}\vec{e}_r$$

- Le potentiel $V_f(M)$

  On a $\vec{E}_f(M)=-\overrightarrow{grad}V_f(M)$

$$E(r)\vec{e}_r=-\frac{dV_f(M)}{dr}\vec{e}_r$$

$$dV_f(M)=E(r)dr\rightarrow\ dV_f(M)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r}$$

$\rightarrow V_f(M)=\int dV_f(M)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r+cst$

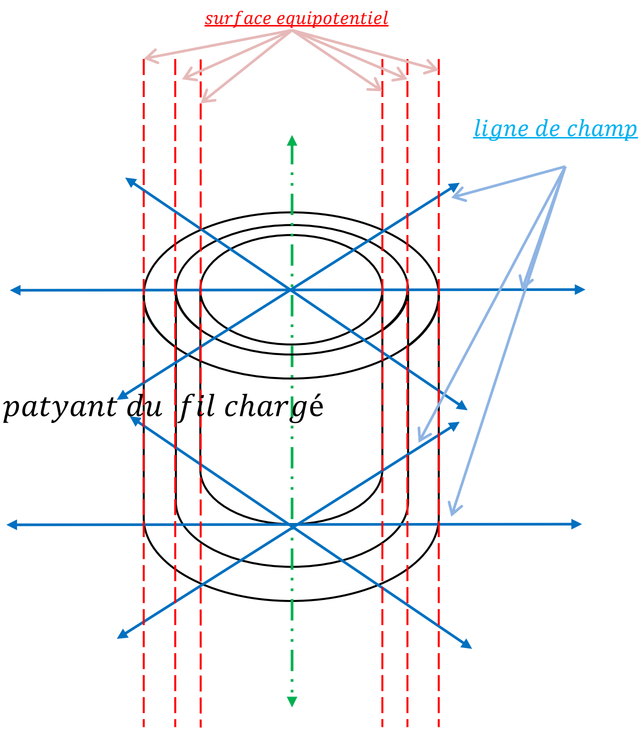
$on\ a\ V_f(r=1)=0=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln 1+cst\rightarrow cst=0$

Finalement $V_f(M)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r.$

iii) Lignes de champ

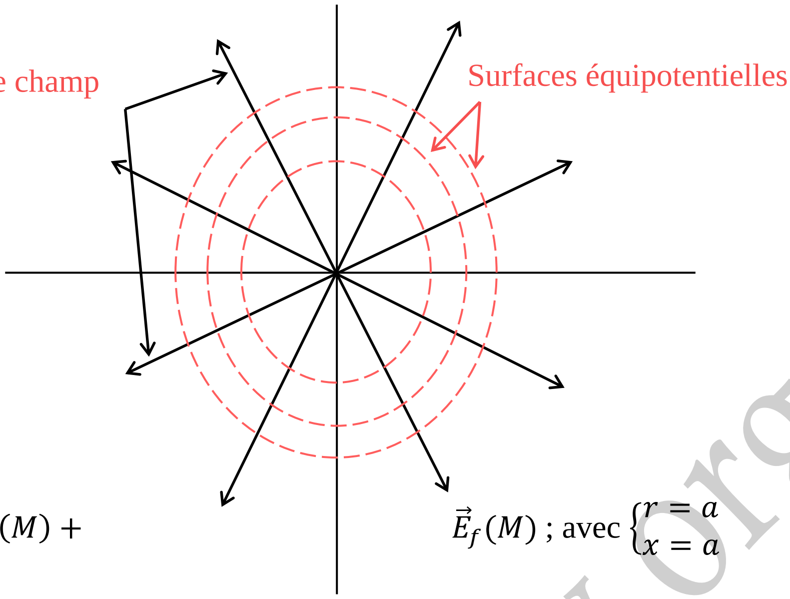
$\vec{E}$ Est perpendiculaire a l'axe du fil

$\rightarrow$ *les lignes de champ somt des droite qui patyant du fil chargé*



- Surface équipotentielles :

  Les surfaces équipotentielles sont des cylindres de même axe de distribution Les lignes de champ et les surfaces équipotentielles sont orthogonales



III) Un fil infini

i) Le champ $\vec{E}$

On a $\vec{E} = \vec{E}_s(M) + \vec{E}_f(M)$; avec $\begin{cases} r = a \\ x = a \end{cases}$

$$\vec{E} = \frac{-\lambda R a}{2\varepsilon_0 (a + R^2)^{3/2}}\vec{\imath} + \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}\vec{e}_r$$

ii) Le potentiel $V(M)$

On a $V(M) = V_s(M) + V_f(M)$

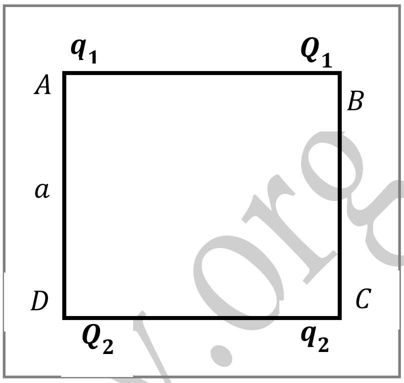
$$= \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{a^2 + R^2}} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln a$$

$$= \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\left(\frac{R}{\sqrt{a^2 + R^2}} + \frac{\ln a}{\pi}\right)$$

Contrôle N : 1 - Electricité 1 - Semestre2 - Filière – SMPC/SMA -2008/2009 FSSM :

EXERCICE I

Soient $q_1, Q_1, q_2, et\ Q_2$ quatre charge électrique disposées au quatre sommet d'un carre de coté a (voir figue). On suppose que $q_1 = q_2 = q$, $Q_1 = Q_2 = Q$ et que la force résultante agissant sur Q_1 est nulle.



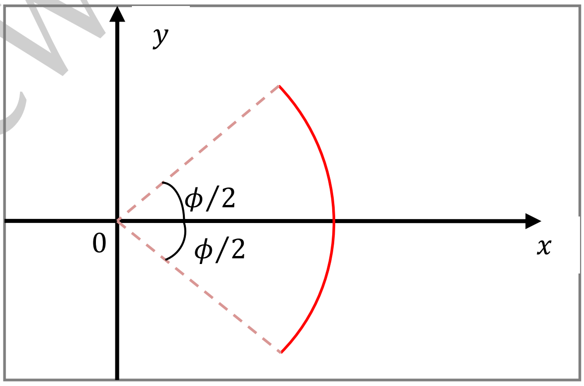
1. Calculer et représenter la force $\overline{F}_{Q_2Q_1}$ exercée par la charge Q_1 sur la charge Q_2

2. Calculer et représenter les forces $\overline{F}_{q_1Q_1}$ et $\overline{F}_{q_2Q_1}$ exercées par les charges q_1 et q_2 sur la charge Q_1

3. Calculer la charge Q en fonction de la charge q sachant que $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9 SI$.

EXERCICE II

Un fil portant une charge positive q a la forme d'un arc de cercle de centre O, de rayon r d'angle ϕ (voire figure).



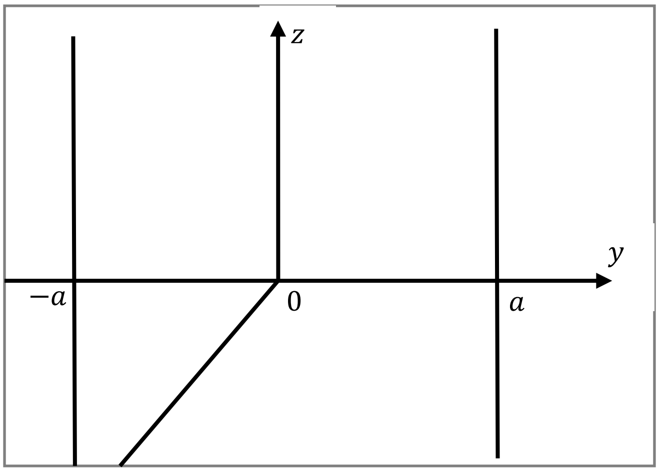
1. Sachant que la charge q est uniformément repartie, calculer le vecteur champ électrique $\vec{E}$ au point O crée par cette distribution.

2. Que devient $\vec{E}$ pour l'angle $\phi = 0, \phi = \pi$,

   $\phi = 2\pi$

EXERCICE III

Soit un fil infiniment long portant une densité linéique de charge $\lambda > 0$.



1. Calculer le champ électrostatique en un point M a la distance r du fil. En déduire le potentiel en ce point.

On dispose maintenant de deux fils infiniment long, tels que le fil 1, chargé avec une densité linéique λ, est en $y = a$ et le fil 2, chargé avec une densité linéique $-\lambda$, est en $y = -a$ (voir figure). Soit M un point de l'espace a la distance

$\boldsymbol{r_1}$du fil 1 et $\boldsymbol{r_2}$du fil 2.

2. Etablir l'expression du potentiel au point M en fonction de $\boldsymbol{\lambda, r_1}$ ***et*** $\boldsymbol{r_2}$, on choisit l'origine des potentiels au point O.

3. En posant $\boldsymbol{k = e^{\left(-\frac{2\pi\varepsilon_0 V_0}{\lambda}\right)}}$, déduire l'équation de la surface équipotentielle lieu des point M ayant le même potentiel $\boldsymbol{V_0}$.

EXERCICE IV

Une distribution de charge a symétrique sphérique autour d'un point $\boldsymbol{0}$ crée en un point $\boldsymbol{M}$ quelconque de l'espace situé a une distance $\boldsymbol{OM = r}$, un potentiel électrostatique de la forme suivant :

$$\boldsymbol{V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-\frac{r}{a}}}$$ Ou a et q sont des constantes positives.

1. Déterminer la direction, le sens et le module du champ électrostatique associé à cette distribution de charges.

2. Calculer le flux $\boldsymbol{\phi(r)}$ du champ électrostatique $\boldsymbol{\vec{E}}$ à travers une sphère de centre O et de rayon r.

3. Déterminer les limites du flux du champ $\boldsymbol{\vec{E}}$ quand r tend vers zéro et quand r tend vers l'infini.

4. En déduire laquelle des distributions de charge suivantes peut créer ce potentiel et ce champ, justifier votre choix :

   i. Une charge q placée en O et une charge –q répartie dans tout l'espace.

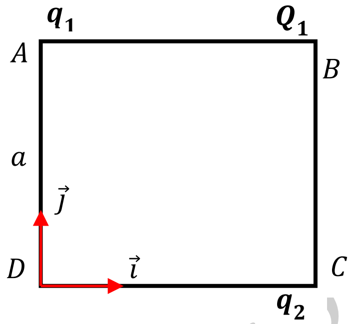
   ii. Une charge -q placée en O et une charge q répartie dans tout l'espace.

   iii. Une charge –q répartie dans tout l'espace.

   iv. Une charge q placée en O et une charge 2q répartie dans tout l'espace.

Corrigée - Electricité 1 - Semestre2 - Filière – SMPC/SMA -2008/2009 FSSM

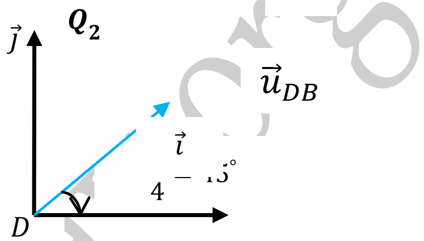
EXERCICE IV



1. La force $\vec{F}_{Q_2Q_1}$

On a $\vec{F}_{Q_2Q_1} = \frac{Q_2Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_{DB}}{DB^2}$

$\vec{u}_{DB}$: Vecteur unitaire.



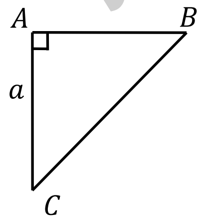
$\vec{u}_{DB} = \cos\frac{\pi}{4}\vec{i} + \sin\frac{\pi}{4}\vec{j}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

Et on a ABCD est un carré de coté "a"

$AD^2 + AB^2 = DB^2$

$a^2 + a^2 = DB^2 \Rightarrow DB^2 = 2a^2$



D'où $\vec{F}_{Q_2Q_1} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2a^2}\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{j})$

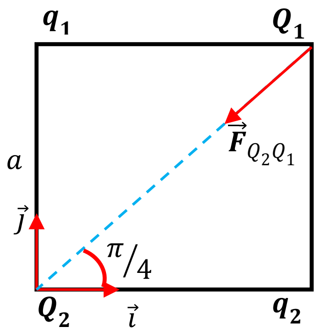
Avec $Q_1 = Q_2 = Q$

$\vec{F}_{Q_2Q_1} = \frac{\sqrt{2}Q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}(\vec{i}+\vec{j})$

- Représentation

On prend $Q < 0$ (choix)

Donc $\vec{F}_{Q_2Q_1}$ =____________SI



2. Calcule de la force $\vec{F}_{Q_1Q_1}$

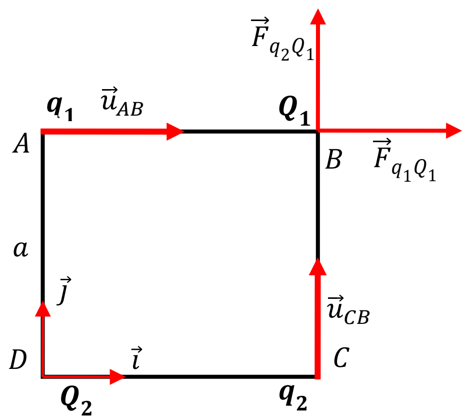
On a $\vec{F}_{Q_1Q_1} = \frac{q_1Q_1}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{u}_{AB}}{AB^2}$

Avec $\vec{u}_{AB} = \vec{i}\,;\, q_1 = q\,;\; Q_1 = Q\ et\ AB = a$

D'où $\vec{F}_{Q_1Q_1} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{a^2}\vec{i}$

- La force $\vec{F}_{q_2Q_1}$

On a $\vec{F}_{q_2Q_1} = \frac{q_2Q_1}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{u}_{CB}}{CB^2}$



Avec $q_2 = q, Q_1 = Q, \vec{u}_{CB} = \vec{j}, CB = a$

D'où

$$\vec{F}_{q_2Q_1} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{a^2}\vec{j}$$

- Représentation

  En prend $q > 0$

3. Calculons Q en fonction de q

On a la force résultante agissant sur Q_1 est nulle donc

$$\vec{F}_{q_1Q_1} + \vec{F}_{q_2Q_1} + \vec{F}_{Q_2Q_1} = \vec{0}$$

$$\frac{qQ}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{a^2}\vec{\imath} + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{a^2}\vec{\jmath} + \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{QQ}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{a^2}(\vec{\imath}+\vec{\jmath}) = \vec{0}$$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{a^2}\left(q\vec{\imath} + q\vec{\jmath} + \frac{\sqrt{2}}{4}Q(\vec{\imath}+\vec{\jmath})\right) = \vec{0}$$

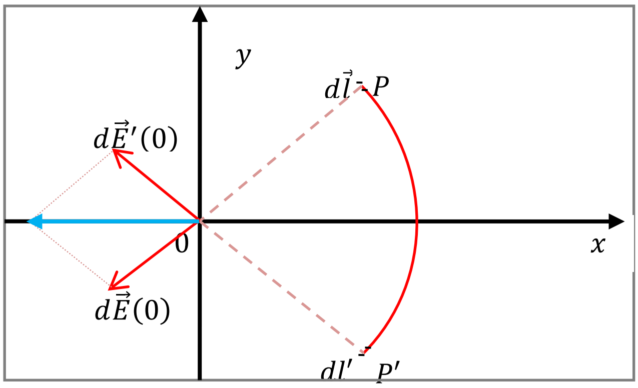
$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{a^2}\left(\left(q+\sqrt{2}\frac{Q}{4}\right)\vec{\imath} + \left(q+\sqrt{2}\frac{Q}{4}\right)\vec{\jmath}\right) = \vec{0}$$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{a^2} \neq 0 \Longrightarrow \left(q+\sqrt{2}\frac{Q}{4}\right)(\vec{\imath}+\vec{\jmath}) = \vec{0}$$

Et $(\vec{\imath}+\vec{\jmath}) \neq \vec{0} \Longrightarrow \left(q+\sqrt{2}\frac{Q}{4}\right) = 0$

Finalement $Q = -\frac{4}{\sqrt{2}}q \Longrightarrow Q = -2\sqrt{2}q$

EXERCICE II



1. Le champ électrique $\vec{E}$ au point O par raison de symétrie le champ électrostatique crée par l'arc est porté par l'axe ox.

   En effet, de élément de charge dq de longueur dl centre en p et p' symétriques par apport a (ox), créent en O deux champ élémentaires $d\vec{E}(O)$ et $d\vec{\varepsilon}(O)$ dont résultante est portée par l'axe ox.

   Il en est de même pour toutes les autres paires d'élément de charges de la distribution. Ainsi le champ total est porté par l'axe ox .

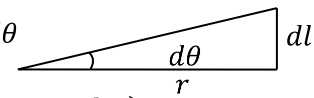
   Donc $d\vec{E}(O) = -dE\cos\theta\,\vec{\imath}$

   Avec $dE(0) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^2}$

   avec $dq = \lambda dl$

   Or $dl = rd\theta$

Tg dθ ≃ dθ = $\frac{\text{dl}}{\text{r}} \Longrightarrow dl = d\theta$



$\tan\theta \simeq d\theta$ (pour les petites angles)

Il vient $E(\theta) = \int_{arc} dE(0)$

$$E_x(0) = \int_{arc} \frac{\lambda r d\theta}{4\pi\varepsilon r^2}\cos\theta$$

$$= \int_{-\frac{\phi}{2}}^{\frac{\phi}{2}} \frac{\lambda d\theta}{4\pi\varepsilon r}\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon r}\int_{-\frac{\phi}{2}}^{\frac{\phi}{2}}\cos\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon r}[\sin\theta]_{-\frac{\phi}{2}}^{\frac{\phi}{2}}$$

$$\Rightarrow E(0) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon r}\left[\sin\frac{\phi}{2} - \sin\left(-\frac{\phi}{2}\right)\right]\begin{cases}\sin\left(-\frac{\phi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\\ \sin\ \ est\ impaire\end{cases}$$

$$\Rightarrow E(0) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon r}2\sin\frac{\phi}{2}$$

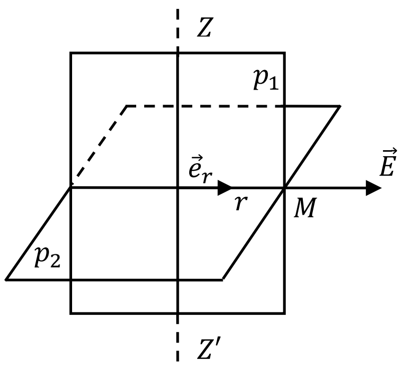
$$\Rightarrow \vec{E}(0) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}2\sin\frac{\phi}{2}\vec{\imath}$$

2.

- Pour $\phi = 0$ on a $\vec{E}(0) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\sin(0)\vec{\imath}$
  $\Rightarrow \quad \vec{E}(0) = \vec{0}$
- Pour $\phi = \pi$ on a $\sin(\pi) = -1$
  $\Rightarrow \vec{E}(0) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{r}\vec{\imath}$
- Pour $\phi = 2\pi$ on a $\sin(2\pi) = 0$
  $\Rightarrow \vec{E}(0) = \vec{0}$

EXERCICE III

1. Détermination de $\vec{E}$ en un point M de l'espace.



- La direction et le sens de $\vec{E}$

  Le fil admet une symétrie cylindrique

  Donc en peut écrire : $\vec{E} = E_r(r,\theta,z)\vec{e}_r + E_\theta(r,\theta,z)\vec{e}_\theta + E_z(r,\theta,z)\vec{e}_z$

  La distribution admet comme plans de symétrie un plan P_1 passant par M et contenant l'axe ZZ'et un autre plan P_2 perpendiculaire a l'axe ZZ' en déduire alors que le champ $\vec{E}$ est porté par l'intersection de ces plan c'est a dire l'axe de direction $\vec{e}_r$

  $\Rightarrow \vec{E}(M) = E_r(r,\theta,z)\vec{e}_r$

- La distribution est invariante par tout rotation autour du fil du et par translation parallèle au fil, le champ ne peuvent donc dépendre des coordonnées θ et z.

  $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e}_r$

- Choix de la surface de Gauss.

Le champ $\vec{E}(M)$ est radial et constant sur un cylindre d'axe ZZ', la surface de Gauss convenable sera un cylindre de rayon r et de hauteur h.
Le théorème de Gauss :

$$\phi = \oiint_{Sg} \vec{E}\,.d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

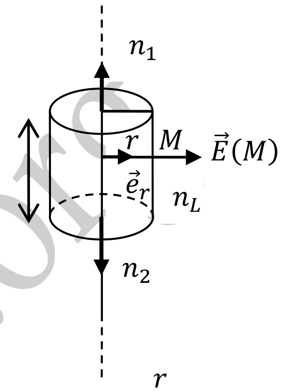
$Sg: surface\ de\ Gauss$

$\phi: le\ flux\ de\ \vec{E}\ a\ travers\ Sg$

$Sg = S_{b_1} + S_{b_2} + S_L\ ;$

$S_{b_1} et\ S_{b_1}\ les\ bases$

$S_L: surface\ lateral.$



$$\phi = \oiint_{S_{b_1}} \vec{E}\,d\vec{S} = \iint_{S_{b_1}} \vec{E}\,d\vec{S} + \iint_{S_{b_2}} \vec{E}\,d\vec{S} + \iint_{S_L} \vec{E}\,d\vec{S}$$

Or $\qquad \vec{E} = E_r(r)\vec{e}_r$

$$\phi = \iint_{S_{b_1}} E_r(r)\,\vec{e}_r\,dS\,\vec{n}_1$$

$$+ \iint_{S_{b_2}} E_r(r)\,\vec{e}_r\,dS\,\vec{n}_2 + \iint_{S_L} E_r(r)\,\vec{e}_r\,dS\,\vec{n}_2$$

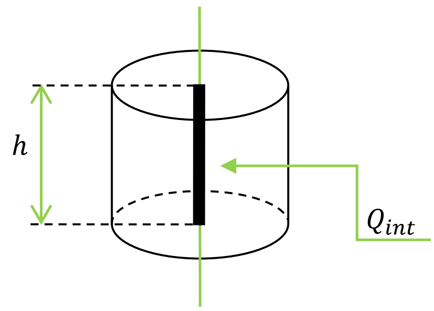
$$Or\ n_1 = \vec{k}\,; n_2 = -\vec{k}\,;\ n_2 = \vec{e}_r \quad \left| \begin{array}{l} \vec{e}_r.\vec{k} = 0 \\ \vec{e}_r.\vec{e}_r = 1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \phi = \iint_{S_L} E_r(r).dS\,; le\ champ\ est\ constant$$

Sur un cylindre de rayon r et de l'axe ZZ'.

$$\Rightarrow \phi = E_r(r)\iint_{S_L} dS = E_r(r).S_L = E_r(r).2\pi rh$$

$$Q_{int} = \int dq = \int \lambda\,dl = \lambda\,h$$



Les charges sont sur le segment de longueur h

D'où $\qquad E_r(r).2\pi rh = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow E_r(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

Donc $\quad \vec{E}_r(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\vec{e}_r$

- Le potentiel en un point M de l'espace.

  On a $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M) = -\frac{dV(M)}{dr}\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{dV(M)}{d\theta}\vec{e}_\theta - \frac{dV(M)}{dz}\vec{k}$

  Puisque $\vec{E}(M)$ ne dépend que de r on a alors

$$E_r(r)\vec{e}_r = -\frac{dV(M)}{dr}\vec{e}_r$$

$$E_r(r) = -\frac{dV(M)}{dr}$$

$\Longrightarrow dV(M) = -E_r(r).dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{r}$

$\Longrightarrow V(M) = \int dV(M) = \int -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{r}dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\int\frac{dr}{r}$

$\Longrightarrow V(M) = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln(r) + cte.$

2. L'expression du potentiel au point M.

On a $V(M) = -\frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln(r) + cte$

On choisit l'origine des potentiels au point 0 donc $V(0) = 0 \Longrightarrow cst = 0$

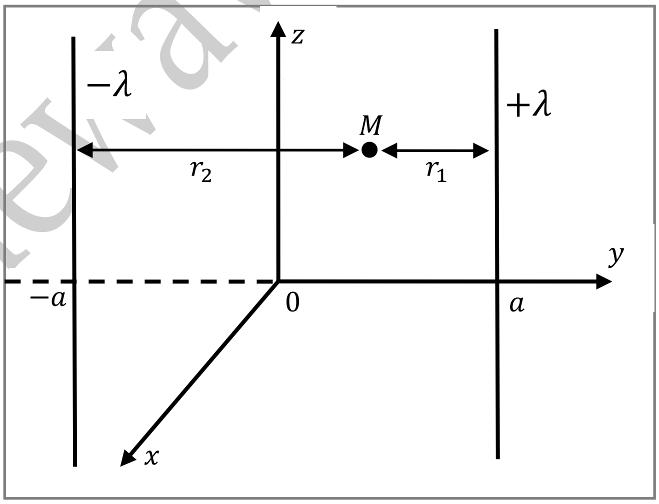
Le potentiel au point M est :

$V(M) = V_1(M) + V_2(M)$

$V_1(M) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln(r_1)$ *Le potentiel électrique crée en M par une distribution* $(+\lambda)$

$V_2(M) = -\frac{(-\lambda)}{2\pi\varepsilon}\ln(r_2)$ *le potentiel electrique cree en un point M par point M par une distribution* $(-\lambda)$

D'où $V(M) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln(r_1) + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln(r_2)$



$$\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}(\ln(r_2) - \ln(r_1)) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

3. L'équation de la surface équipotentielle.

$\Longrightarrow V(M) = cst = V_0$

$\Longrightarrow \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = V_0 \Longrightarrow \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = \frac{2\pi\varepsilon V_0}{\lambda}$

$\Longrightarrow \frac{r_2}{r_1} = e^{\frac{2\pi\varepsilon V_0}{\lambda}} = k$

L'équation de la surface équipotentielle est :

$$\frac{r_2}{r_1} = k$$

EXERCICE IV

1. Direction, sens, module du champ électrique :

La distribution de charge admet une symétrie sphérique

Donc $\vec{E}(r) = E(r)\vec{e}_r$

On a $V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon r}e^{-\frac{r}{a}}$

a et q sont des constantes posetives.

$$\vec{E}(r) = -\overrightarrow{grad}dV(r)$$

$$E(r)\vec{e}_r = -\frac{\delta V(r)}{\delta r}\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{dV(r)}{\delta\theta}\vec{e}_\theta - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\delta V(r)}{\delta\varphi}\vec{e}_\varphi$$

Le champ ne dépend que de r

$\Longrightarrow E(r)\vec{e}_r = -\frac{\delta V(r)}{\delta r}\vec{e}_r$

$$(f+g)' = f'g + fg'$$

$$E(r) = \frac{-d}{dr}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon r}e^{-\frac{r}{a}}\right)$$
$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}e^{-\frac{r}{a}}\right)$$
$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left[-\frac{1}{r^2}e^{-\frac{r}{a}} + \frac{1}{r}\left(\frac{-1}{a}\right)e^{-\frac{r}{a}}\right]$$
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon}e^{-\frac{r}{a}}\left(-\frac{1}{r^2} - \frac{1}{ra}\right)$$
$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}e^{-\frac{r}{a}}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a}\right)\vec{e}_r$$

2. Le flux $\phi(r)$ du champ électrostatique $\vec{E}(r)$ a travers une sphère de centre O et de rayon r

On a $\phi(r) = \oiint_{Sphere}\vec{E}(r)d\vec{S}$ avec $d\vec{S} = dS\vec{e}_r$
$= r^2\sin\theta\, d\theta d\varphi$

$$\Longrightarrow \phi(r) = \oiint_{Sphere} E(r)\vec{e}_r\, dS\,\vec{e}_r$$

$$\Longrightarrow \phi(r) = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r}e^{-\frac{r}{a}}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r}e^{-\frac{r}{a}}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right)\int_0^{\pi}\sin\theta\; d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi$$

Or $\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta = [-\cos\theta]_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(\theta) = 1 + 1 = 2$

Et $\int_0^{2\pi}d\varphi = [\varphi]_0^{2\pi} = 2\pi - 0 = 2\pi$

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}e^{-\frac{r}{a}}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right)4\pi$$

$$\phi(r) = \frac{q}{\varepsilon_0 r}e^{-\frac{r}{a}}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right)$$

3. Les limites du flux du champ $\vec{E}$

On a $\phi(r) = \frac{q}{\varepsilon_0 r}e^{-\frac{r}{a}}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right)$

$$\lim_{r\to+\infty}\phi(r) = \lim_{r\to+\infty}\frac{q}{\varepsilon_0 r}e^{-\frac{r}{a}}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right)$$

Or $\left.\begin{array}{l}\lim_{r\to+\infty} e^{-\frac{r}{a}} = 0\\ \lim_{r\to+\infty}\frac{1}{r} = 0\end{array}\right\}$ $donc\ \lim_{r\to+\infty}\phi(r) = 0$

- $\lim_{r\to 0}\phi(r) = \lim_{r\to 0}\frac{q}{\varepsilon_0 r}e^{-\frac{r}{a}}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right)$

$$= \lim_{r \to 0} \left(\frac{q}{\varepsilon_0 r} e^{-\frac{r}{a}} + \frac{q}{a\, \varepsilon_0 r} e^{-\frac{r}{a}} \right)$$

Or $\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^2} e^{-\frac{r}{a}} = \lim_{r \to 0} e^{-\frac{r}{a}} = e^0 = 1$

$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r} e^{-\frac{r}{a}} = \lim_{r \to 0} e^{-\frac{r}{a}} = e^0 = 1$

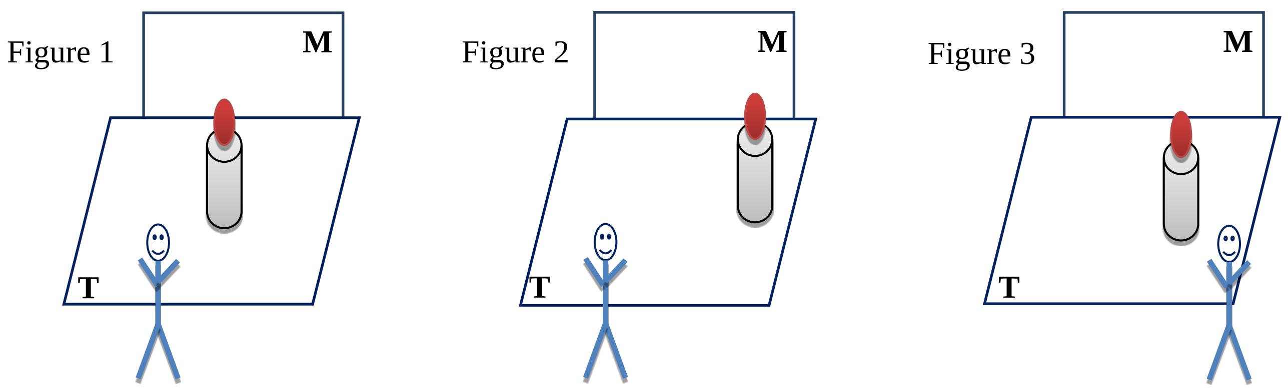
D'où $\lim_{r \to 0} \phi(r) = \frac{q}{\varepsilon_0}\left(1 + \frac{1}{a}\right)$.

OPTIQUE 1 :

Contrôle N : 1 optique 1 Filière SMPC/SMA 2004-2005 FSSM :

Questions de cours

Pour les 3 figures ci-dessous, on place une bougie sur table T devant un miroir plan M, un observateur est placé de l'autre côté de la table de façon à permettre l'observation de l'image de la bougie à travers le miroir M. Choisir une seule réponse (a, b, c ou d) aux questions proposées.



1) Sur la figure1, l'image de la bougie à travers le miroir M se trouve localisée :
   (a) devant le miroir
   (b) derrière le miroir
   (c) sur la surface du miroir
   (d) pas d'image

2) Sur la figure1, la taille de l'image de la bougie à travers le miroir M est :
   (a) plus grande que la bougie
   (b) la même
   (c) plus petite que la bougie
   (d) pas d'image

3) Sur la figure 2, la position de la bougie est déplacée vers la droite. L'image de la bougie vue par l'observateur se trouve localisée :
   (a) A gauche de la position précédente
   (b) A droite de la position précédente
   (c) A la même position
   (d) Pas d'image

4) Sur la figure 3, l'observateur s'est déplacé vers la droite par rapport à la figure 1.La bougie est restée à la même position que dans la figure 1.L'image de la bougie vue par l'observateur se trouve localisée :

   (a) A droite de la position obtenue sur la figure 1
   (b) A la même position que celle obtenue sur figure 1
   (c) A gauche de la position obtenue sur la figure 1

(d) Pas d'image

Exercice I :

On s'intéresse à la propagation du rayon lumineux qui se dirige de la gauche vers la droite entre deux milieux homogène et transparents (voir les figures de 1 à4 ci –dessous).Les deux milieux sont caractérisés par des indices de réfractionn_1 *et* n_2.

En justifiant votre réponse et en s'appuyant sur les lois de Descartes, répondre aux questions suivantes (de 1 à 4) par une seule réponse parmi les propositions suivantes (de A à F).

A : seulement si $n_2 > n_1$ D : serait possible avec A ou C

B : seulement si $n_2 = n_1$ E : jamais possible

C : seulement si $n_2 < n_1$ F : toujours possible quelques soit n_1 et n_2

1. Pour quelle condition (A et F) les rayons lumineux peuvent être comme sur la figure 1 ?
2. Pour quelle condition (A et F) les rayons lumineux peuvent être comme sur la figure 2 ?
3. Pour quelle condition (A et F) les rayons lumineux peuvent être comme sur la figure 3 ?
4. Pour quelle condition (A et F) les rayons lumineux peuvent être comme sur la figure 4 ?

Figure 1

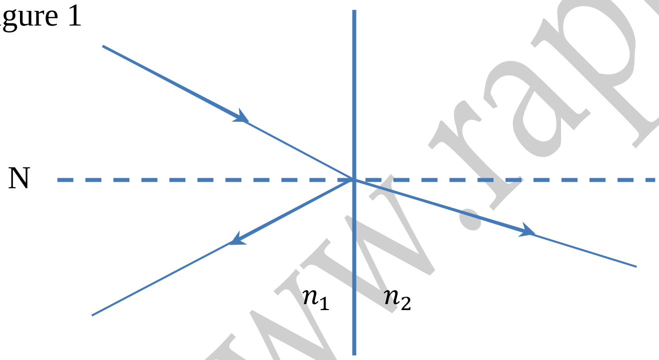


Figure 2

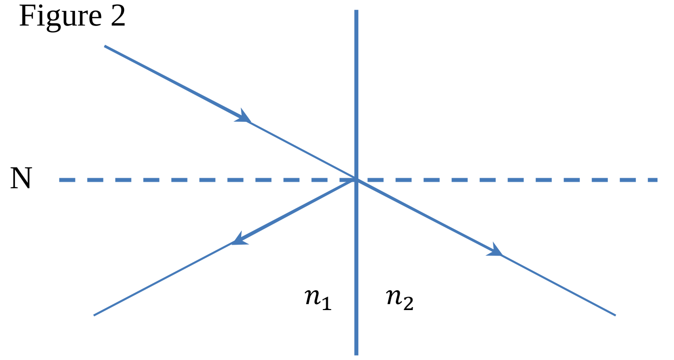


Figure 3

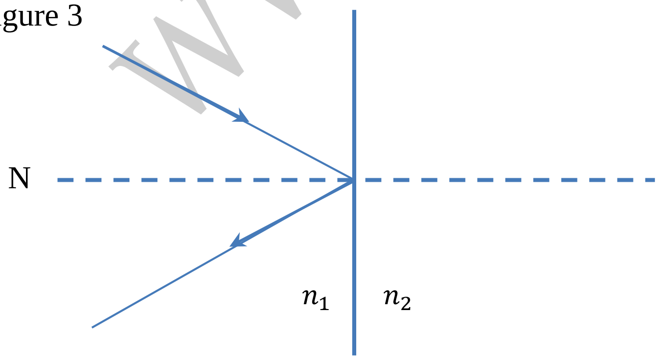
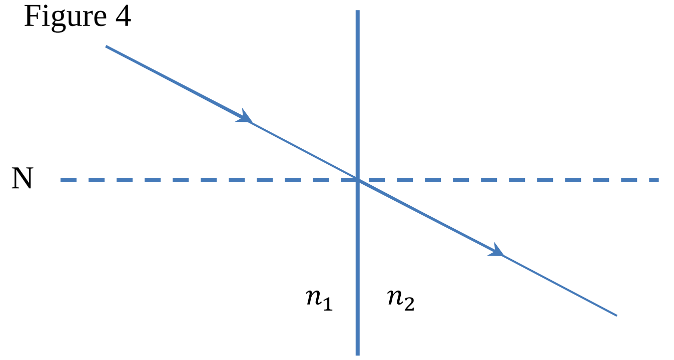


Figure 4



Exercice II :

On considère 2 miroirs sphériques M_1 (concave) et M_2 (convexe) comme représentés respectivement sur les figure 1 et 2 (voir feuille jointe à cette épreuve). Ces deux miroirs sont utilisés dans les conditions d'approximation de Gauss et ayant chacun un centre C, un sommet S et un rayon R=4cm.

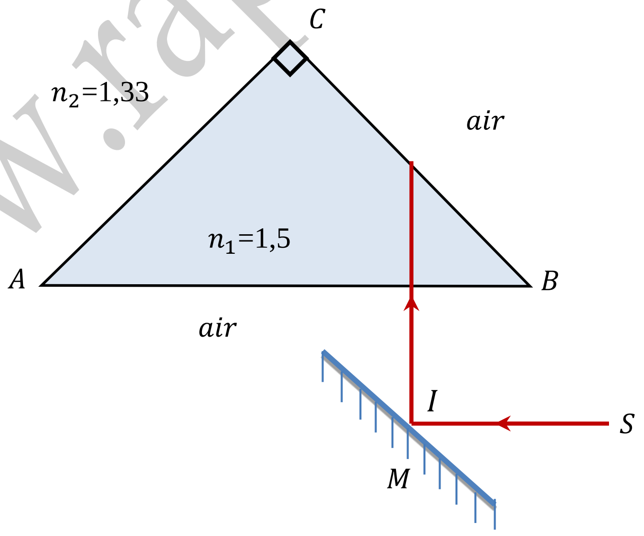
Soit un objet réel AB placé à 1cm du sommet S de M_1 et de M_2.

1. Donner la relation de conjugaison des miroirs sphériques avec origine au sommet dans les conditions d'approximation de Gauss.
2. Construire géométriquement l'image A'B' d'AB à travers M_1 et à travers M_2 (Utiliser les deux graphes sur la feuille jointe). En déduire la nature de l'image obtenue pour chaque miroir.
3. Utiliser la relation de conjugaison pour déterminer la position de l'image $\overline{SA'}$ à travers le miroir M_1 .En déduire le grandissement linéaire.

Exercice III :

On considère trois dioptres plans AB, AC, BC formant un triangle isocèle dioptres AC et BC forment un angle droit au point C. Le dioptre AC sépare deux milieux d'indices n_1 et n_2. Les dioptres AB et BC séparent le milieu d'indice n_1 et l'air. On place un miroir plan M parallèle au dioptre BC puis on envoie un rayon lumineux SI qui arrive sur le miroir M avec un angle d'incidence de 45° (voir figure).
On donne : $n_1 = 1{,}5$ et $n_2 = 1{,}33$.

1. Compléter, en justifiant votre réponse, la marche du rayon lumineux SI
2. Calculer l'angle de réfraction sur le dioptre AC.



Corrigée de Contrôle N : 1 optique 1 Filière SMPC/SMA 2004-2005 FSSM :

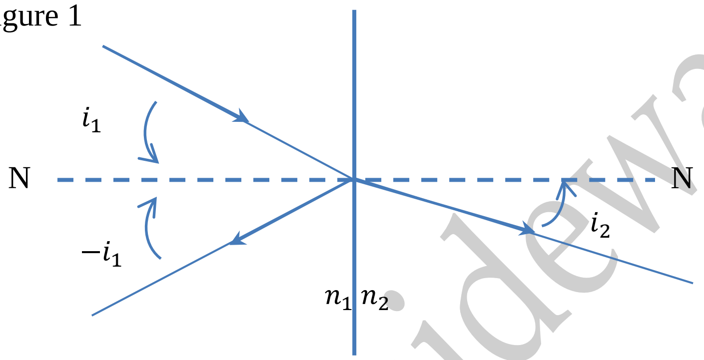
Questions de cours :

1. Réponse (b).
2. Réponse (b).
3. Réponse (b).
4. Réponse (b).

Exercice I :

1. Les rayons lumineux peuvent être comme sur la figure 1 si nous avons la condition (A) c.à.d. : $n_2 > n_1$Justification.

Figure 1



<u>-Pour le rayon réfracté :</u>

Descartes: $n_1.\sin i_1 = n_2.\sin i_2$ Or $\;$ n2 $> n1$ $\;$ implique $\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1} > 1$

$Alors$: $\sin i_1 > \sin i_2 \quad \Leftrightarrow \quad i_1 > i_2$

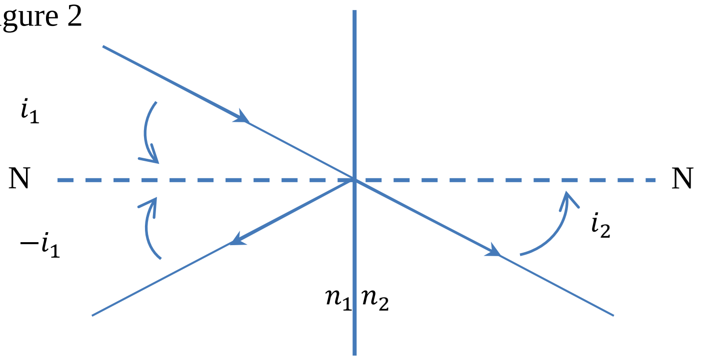
L'angle de réfraction i_2 est plus petit que l'angle d'incidence i_1

Le rayon réfracté s'approche la normale (milieu 2 est plus réfringent)

-<u>Pour le rayon réfléchi</u> : il fait un angle $-i_1$ par rapport à la normale N

2. Les rayons lumineux peuvent être comme sur la figure 2 si nous avons la condition (C) c.à.d:$n_1 > n_2$justification

Figure 2



- Pour le rayon réfracté :

Descartes: $n_1 . \sin i_1 = n_2 . \sin i_2$ Or $n2 < n1$ implique $\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1} < 1$

$Alors$: $\sin i_1 < \sin i_2 \quad \Leftrightarrow \quad i_1 < i_2$

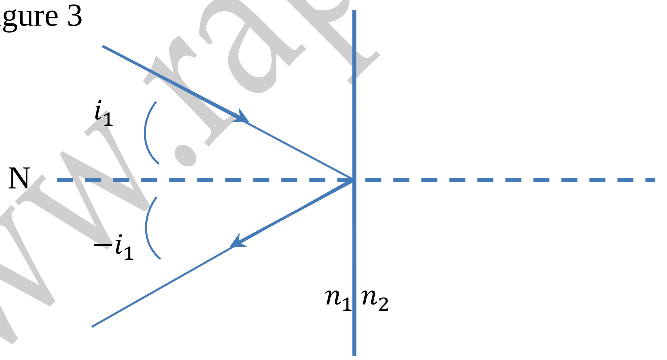
L'angle de réfraction i_2 est plus grand que l'angle d'incidencei_1.

Le rayon réfracté s'éloigne de la normale (milieu 2 est moins réfringent)

- Pour le rayon réfléchi : il fait un angle $-i_1$ par rapport à la normale N

3. Les rayons lumineux peuvent être sur la figure 3 si nous avons la condition (D) justification

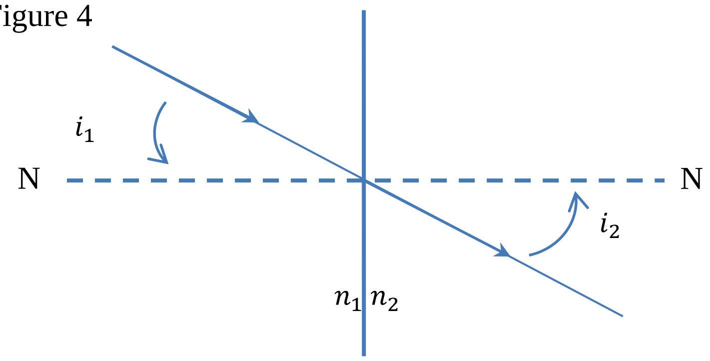
Figure 3



Cette figure serait possible si $n_1 > n_2$.Dans ce cas nous pouvons avoir une réflexion totale avec un certain angle d'incidence.

4. Les rayons lumineux peuvent être comme sur la figure 4 si nous avons la condition (B) c.à.d. :$n_1 = n_2 Justification$

Figure 4



- Pour le rayon réfracté :

Descartes: $n_1.\sin i_1 = n_2.\sin i_2$ Or $i_1 = i_2$ implique $\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1} = 1$

Donc: $n_2 = n_1$ L'angle de réfraction i_2 est égal à l'angle d'incidence i_1

- Nous n'avons pas de réflexion (cela dépend du milieu).

Exercice II :

1. Relation de conjugaison des miroirs sphériques (origine au sommet et dans les conditions d'approximation de Gauss) :

$$\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}}$$

2. Voir graphes (Placer les foyers et construire A'B' pour les deux miroirs).

Les images obtenues à travers M1 et M2 sont :

- Pour M1 l'image est virtuelle, droite et plus grande que l'objet.
- Pour M2 l'image est virtuelle, droite et plus petite que l'objet.

3. A partir de :

$$\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}} \quad nous\ aurons\ \overline{SA'} = \frac{[\overline{SC}.\overline{SA}]}{[\,2\overline{SA} - \overline{SC}]} = +2cm$$

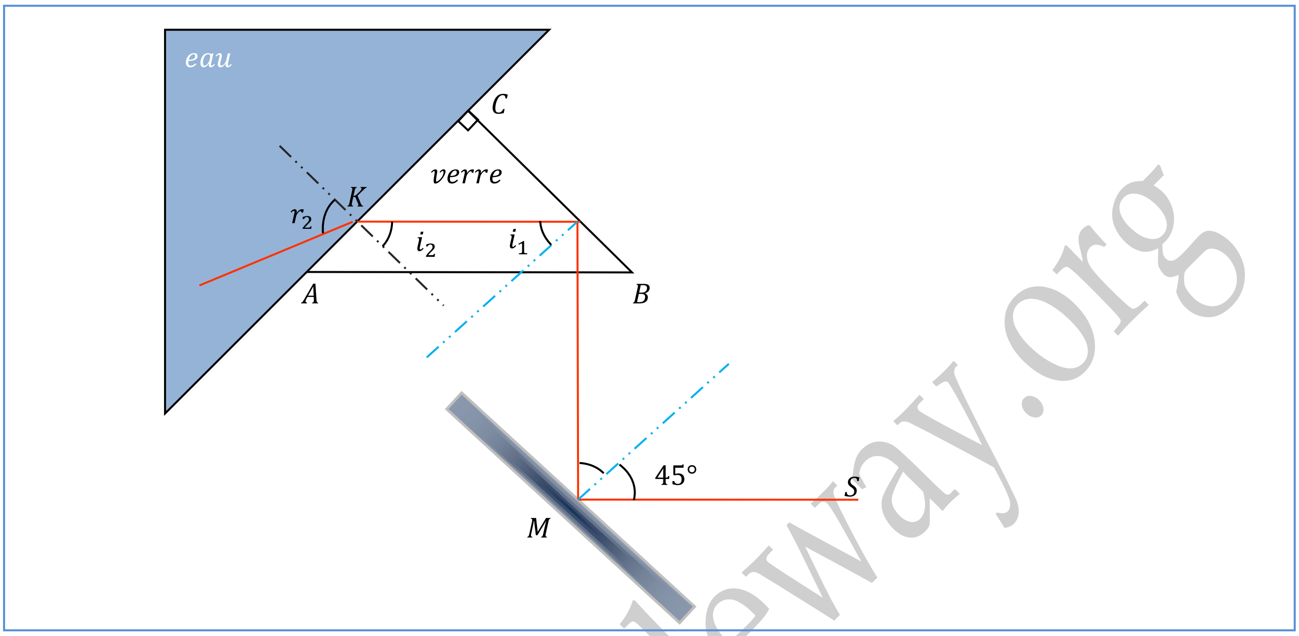
$$Le\ grandissement\ \mathrm{T} = \frac{-\overline{SA'}}{\overline{SA}} = +2$$

Exercice 3 :

1/

Au point I :

Le rayon incident SI est réfléchit par le miroir M. l'angle de réflexion est opposé à i_1 est



égale à 45°.

Le rayon réfléchit arrive perpendiculaire au dioptre AB donc il ne subit pas de déviation et arrive sur le dioptre BC sous une incidence i_2 égale à 45°(les normales à M et à BC sont //)

Au point J :

D'après la loi de réflexion on a : $n_1.sin(45) = 1.sin(r_1)$: $soit\ sin(r_1) = 1{,}06$ ce qui est impossible.

Donc il va y avoir une réflexion totale sur le dioptre BC. L'angle de réflexion totale est :

$$I = Arcsin\left(\frac{1}{n_1}\right) = 41,81°$$

Le rayons réfléchit arrive sue le dioptre AC sous une incidence i_2 est gale à 45° (la normale au point J au dioptre BC et le dioptre AC sont //) .

Au point K :

2/D'après la loi de réfraction on a : $n_1.sin(45) = n_2.sin(r_2)$; $soit \quad r_2 = 52{,}89°$.

Graphes pour la construction géométrique / Exercices II

Figure 1

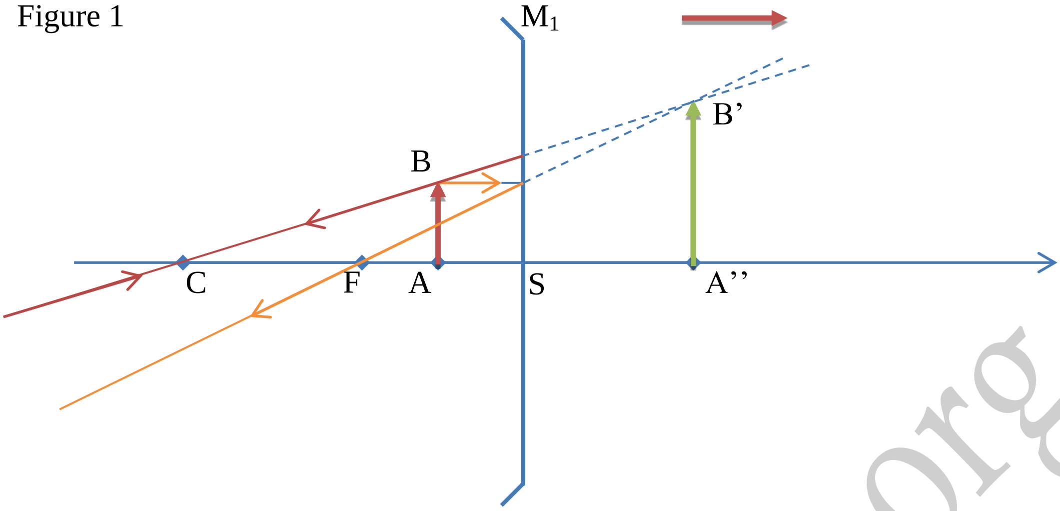
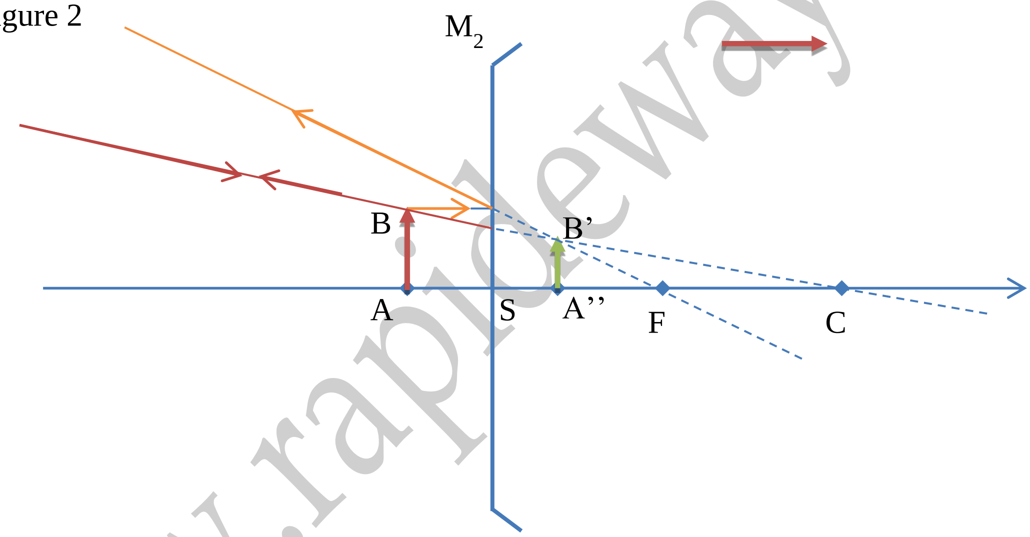


Figure 2



Contrôle N : 1 optique 1 Filière SMPC/SMA 2009-2008 FSSM :

Question de cours :

1. Donner la définition d'un dioptre plan.
2. Montrer, en faisant une construction géométrique, que la position de l'image A' d'un point objet réel A, à travers un dioptre plan est donnée par la relation

$$\overline{HA'} = \overline{HA}\frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1}$$

i_1, i_2 : étant respectivement les angles d'inccidence et de réfraction.
n_1 , n_2 : Étant respectivement les indices de réfraction du milieu d'entrée et du milieu de sortie
H : est la projection du point A sur le dioptre plan

3. Montrer que le dioptre plan n'est pas rigoureusement stigmatique pour un point objet quelconque de l'espace.
4. Montrer qu'on peut réaliser le stigmatisme approché si le dioptre plan est la faible étendue (angle d'incidences faibles). En déduire la relation de conjugaison du dioptre plan dans ces conditions. Commentez.

Exercice 1

1. On considère un miroir sphérique concave de centre C, de sommet S et de rayon R=1m. En se plaçant dans se plaçant dans les conditions d'approximation de Gauss :
   a. Déterminer sa distance focale ?
   b. On place un écran E sur l'axe optique de ce miroir à la distance d=5m de son sommet S. Où doit-on mettre un objet AB et celle de son image A'B', tel que le grandissement linéaire γ ?
   c. Déterminer la position d'un objet AB et celle de son image A'B', tel que le grandissement linéaire γ soit égal à +2, Faire une construction géométrique.
2. **2.** Compléter la marche des rayons lumineux incidents ou émergents des miroirs sphérique de le figure1.

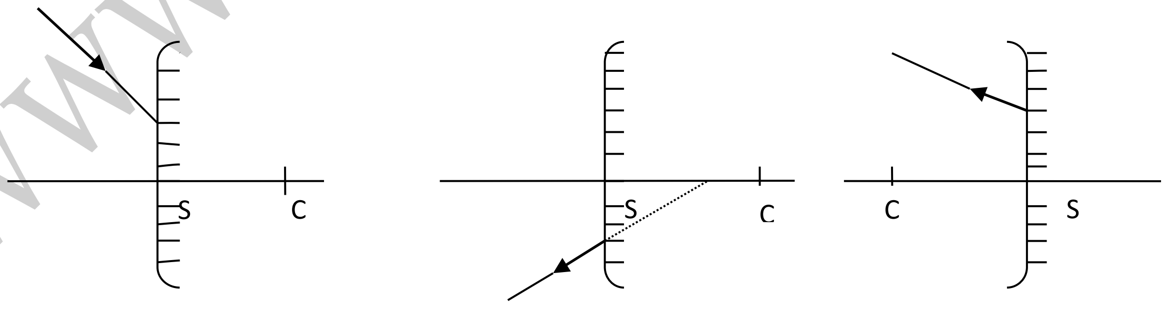


Figure 1

Exercice 2 :

Le rétroviseur intérieur d'une voiture est un miroir plan de largeur l =20 cm disposé verticalement. Ce miroir est situé sur l'axe X'X en son milieu A (X'X perpendiculaire au plan

du miroir plan comme sur la figure2). Un individu, dont l'œil est situé dans l'espace réel du rétroviseur, cherche à déterminer en regardant dans le rétroviseur, la largeur BC de la façade de la maison occupe entièrement son rétroviseur (figure2) :

1. Faire une construction géométrique de l'image de la façade, observée par l'œil à travers le rétroviseur.
2. Déterminer la largeur de l'image de la façade de la maison, observée par l'œil.

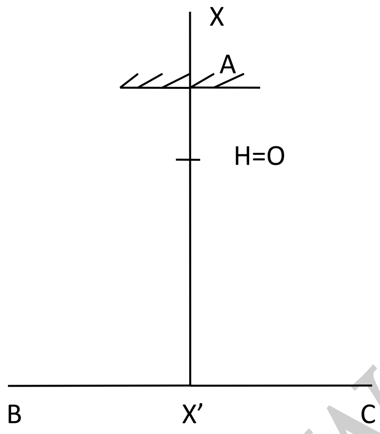


Figure 2

Exercice 3 :

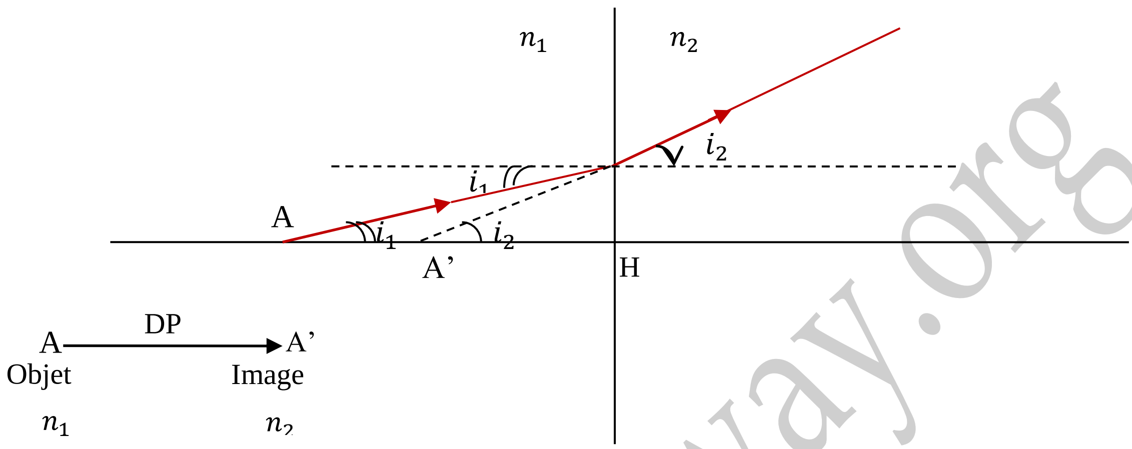
Un rayon lumineux se propage dans un verre d'indice n=1,5 et arrive sur la surface de séparation avec l'air sous une incidence de 35°.

1. Tracer la marche du rayon lumineux
2. Calculer l'angle de réfraction.
3. Calculer l'angle de réflexion totale

Corrigée de Contrôle N : 1 optique 1 Filière SMPC/SMA 2009-2008 FSSM

Question de cours :

1. Un dioptre plan est l'ensemble de deux milieux inégalement réfringents séparés par une surface plane.
2.



Relation de conjugaison du dioptre plan . $\frac{\overline{HA}}{n_1} = \frac{\overline{HA'}}{n_2} \Longrightarrow \overline{HA'} = \frac{n_2}{n_1}\overline{HA}$

Le chemin optique L : L= (AA') = (AI) + IA'

On a $\cos i_1 = \frac{\overline{HA}}{\overline{AI}}$ et $\cos i_2 = \frac{HA\prime}{\cos i_2}$

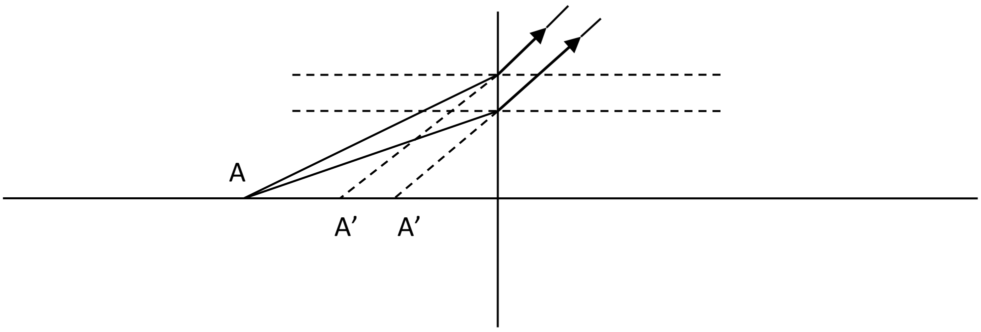
$\Longrightarrow$ L = $\frac{HA}{\cos i_1} - \frac{HA\prime}{\cos i_2}$ or $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

$\sin i_1 = \frac{\overline{HI}}{\overline{AI}}$; $\sin i_2 = \frac{\overline{HI}}{\overline{A\prime I}}$

Donc on a $n_1 \frac{\overline{HI}}{\overline{AI}} = n_2 \frac{\overline{HI}}{\overline{A\prime I}} \Longrightarrow n_1 \frac{\cos i_1}{\overline{HI}} = n_2 \frac{\cos i_2}{\overline{HA\prime}}$

$\Longrightarrow \overline{HA}' = \frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1}\overline{HA}$

3. Chaque point Objet réel A émet des rayons lumineux sur un dioptre plan ne convergeant pas vers une seul point Image A' la position de l'Image A' ne dépend pas seulement de la position de l'Objet A il dépend aussi de l'angle d'incidence des rayons issue de l'Objet A.



Donc le dioptre plan n'est pas rigoureusement stigmatique.

4. Pour des angles très petits. on a : $\cos i = 1$

$\Longrightarrow \frac{HA'}{n_2} = \frac{HA}{n_1}$ pour des angles très faible on peut réaliser le stigmatisme approché.

L'image ne dépend que de la position de l'objet dans de cas des approximations de Gauss.

Exercice 1 :

1. a)- On a F'=F pour un miroir sphérique.

si on place un objet à l'infini son image sera situé au foyer F'≡ A comme $\overline{SA} \longrightarrow \infty$

Relation de conjugaison : $\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}}$

si $\overline{SA} \longrightarrow \infty$; $\overline{SF'} = \overline{SA'}$ donc $\frac{1}{\overline{SF'}} + 0 = \frac{2}{\overline{SC}}$

$\Longrightarrow \overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{2}$ AN : $\overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{2} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$m

b)- E : ecran , d= 5m , $\overline{SE} = -5\text{m} = \overline{SA'}$

On a $\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}}$ (relation de conjugaison)

$\Longrightarrow \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}} - \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2\,\overline{SA'} - \overline{SC}}{\overline{SC}.\overline{SA}} \Longrightarrow SA = \frac{\overline{SC}.\overline{SA'}}{2\overline{SA} - \overline{SC}}$

$\overline{SC} = -5$m , $\overline{SA'} = -1$m

AN : $\overline{SA} = \frac{(-5).(-1)}{2(-5)+1} = -0{,}5556$m

- γ = grandissement :

$\gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = -\frac{(-5)}{-0{,}56} = -8{,}93 \approx -9$

c)- AB ? A'B' ? $\gamma = +2$.

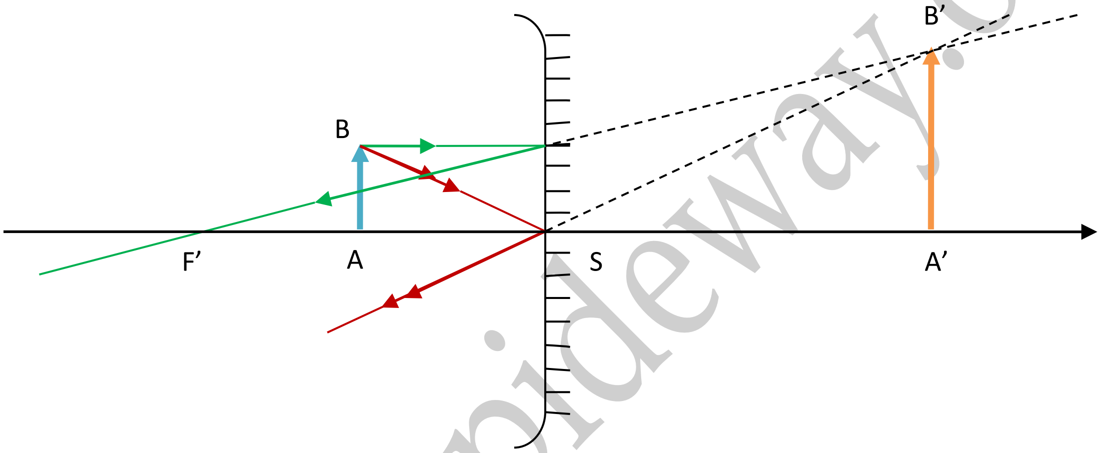
$$\gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = 2 \Rightarrow \overline{SA}' = 2\overline{SA}$$

Or : $\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}} \Rightarrow \frac{1}{2\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SA}}$

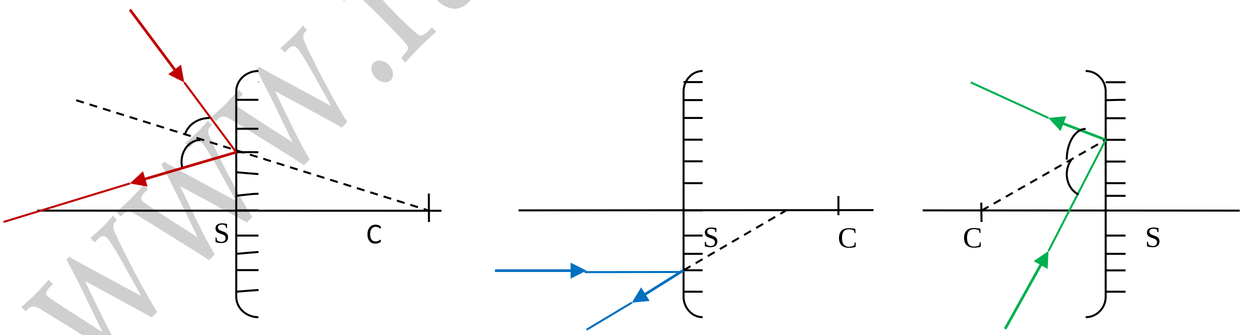
$\frac{1}{\overline{SA}}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{2}{\overline{SC}}$

$\Rightarrow \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{4}{\overline{SC}} \overline{SA} = \frac{\overline{SC}}{4} = -0{,}25\text{m}.$

SA' = + 0,5 Ech : 0,1m = 1cm $\frac{1}{100}$

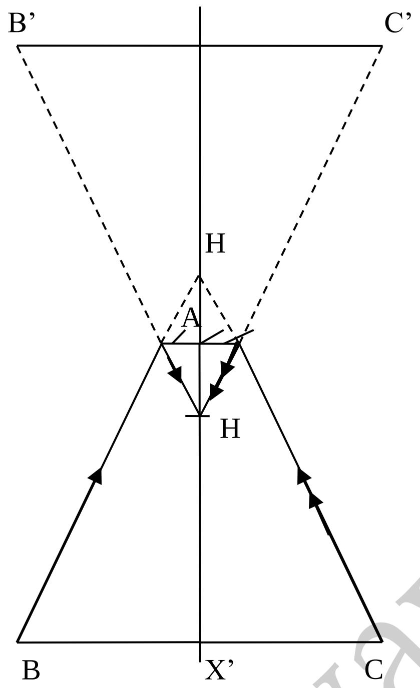


2 .



Exercice 2 :

1- Construction géométrique de l'image de la façade observée par l'œil à travers le rétroviseur.



2- La langueur B'C' de l'image de la façade de la maison observée par l'œil : B'C' = BC

HX = 20m, AH = AH' = 50cm = 0,5m

Dans le triangle H'CX' on applique la relation de Tallis on obtient $\frac{\overline{HA'}}{\overline{AX'}} = \frac{\overline{H'I}}{\overline{IC}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{X'C}}$

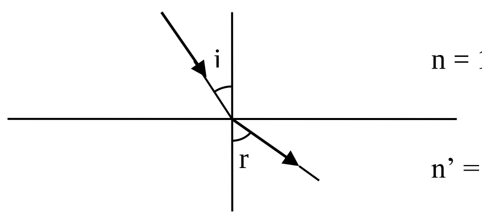
Donc $\overline{X'C} = \overline{AI}.\frac{\overline{AX'}}{\overline{H'A}}$ Avec AX' = AH + HX'= 0,5 + 20 = 20,5m

AN : $\overline{X'C} = 0{,}2.\frac{20{,}5}{0{,}5} = 8{,}2$m

$\overline{AI}$= 0,1m $\overline{H'A} = \overline{AH} = 0{,}5$m Donc : L = B'C' = 2.X'C = 8,2. 2 = 16,4m

Exercice 3 :

1. Construction :



On a $n > n'$ or on a $n\sin(i) = n'\sin(r) \Rightarrow \sin(i)\frac{n'}{n}$

$\Rightarrow \sin i < \sin r \Rightarrow i < r$

2. Calcul de l'angle de réfraction r ?

On a $n \sin i = n' \sin r$

$\Longrightarrow \sin r = \frac{n}{n'} \sin i \Longrightarrow r = \sin^{-1}(\frac{n}{n'} \sin i)$

AN : $i = 35°$, $n = 1{,}5$, $n' = 1$ $\Rightarrow r = \sin^{-1}(\frac{1{,}5}{1} \sin(35°)) = 59{,}35 = 60°$

3. l'angle de réflexion totale :

Pour qu'on réflexion totale il faut que $r \longrightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow i = i_2 = \sin^{-1}(\frac{1}{1{,}5} \sin \frac{\pi}{2})$

$$i = 41{,}8 \approx 42°$$

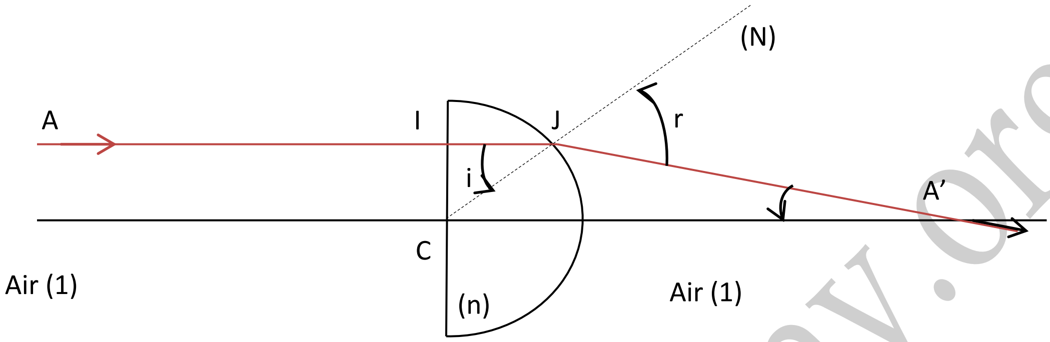
L'angle de réflexion totale est donc : 42°

Bon courage.

Contrôle N : 1 optique 1 Filière SMPC/SMA 2008-2007 FSSM :

Exercice I :

Soit une demi-boule de verre d'indice n, centre C et de rayon R, baignant dans l'air. Un rayon lumineux AI tombe perpendiculairement sur la face plane et sort, après avoir traversé le verre, par la face sphérique en J (figure ci-dessous).



1. Calculer le chemin optique (AA') en fonction de AI, R, n, i et r.
2. Y'a-t-il stigmatisme rigoureux ? Justifier votre réponse
3. Calculer CA' en fonction de R, i et r.
   a. Montrer, en utilisant l'angle limite correspondant à la réflexion totale, que la position limite du point A'_l est: $\overline{CA'_l} = \frac{R}{\cos l}$ avec $l = \arcsin(\frac{1}{n})$.
   b. Montrer que dans le cas de stigmatisme approché : $\overline{CA'} \approx \frac{nR}{n-1}$

Exercice II:

A) On considère un miroir convexe de sommet **S** et de centre C tel que : $\overline{SC} = 4\ cm.$ Déterminer, par construction géométrique, les caractéristiques (position, nature et taille) de l'image A'B' d'un objet AB dans les deux cas suivants :
  1) L'objet **AB** et **réel**, de hauteur 1 cm, placé à 2m du sommet S du miroir.
  2) L'objet AB et virtuel, de hauteur 1 cm, placé à 6m du sommet S du miroir

  Echelle : 1/100 sur l'axe des abscisses

B) Un miroir concave de sommet S et de centre C, forme l'image A'B' d'un objet AB sur un écran placé à 8m du sommet S.
  1) Déterminer la position de l'objet AB ($\overline{SA} = ?$)
  2) Calculer le rayon de courbure $\overline{SC}$ et la distance focale de ce miroir.

  Données : $\overline{AB} = 1\ cm$ et $\overline{A'B'} = -4\ cm$

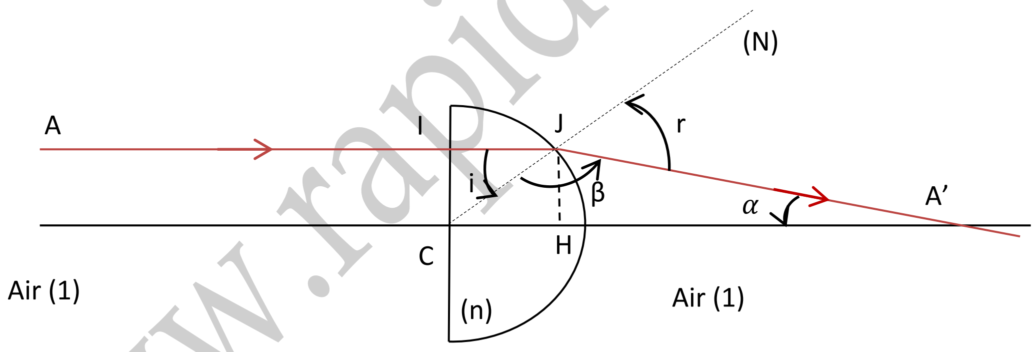
Exercice III

Soit un dioptre sphérique convexe, air (n=1) / verre (n=1,5). De sommet S de centre C. son rayon de courbure est de 20 cm. On cherche à déterminer l'image qu'il donne d'un objet AB de hauteur 1,5 cm.

1) On procède d'abord analytiquement. Quels sont la position, la nature et le grandissement de l'image si :
   a) L'objet et réel situé à 20 cm de S ?
   b) L'objet et virtuel situé à 10 cm de S ?
2) On procède maintenant géométriquement afin de vérifier les résultats précédents.
   a) Quels éléments manquent-ils pour réaliser la construction géométrique ? Déterminer leurs positions. Déduire la nature, convergente ou divergente, du dioptre.
   b) Sur deux figures distinctes, construire l'image des deux objets précédents et vérifier leurs positions et leurs grandissements (échelle : 1/10 sur l'axe des abscisses).
3) Compte tenu des éléments précédents. Peut-on, sans calcule ni construction géométrique, déterminer la position de l'image des objets suivants (si oui, détailler votre raisonnement et préciser la position de l'image) :
   a) Si $\overline{SA} = -40cm$?
   b) Si $\overline{SA} = +60cm$?

Correction de Contrôle N : 1 optique 1 Filière SMPC/SMA 2008-2007 FSSM :

Exercice I



1) Calcule du chemin optique (AA') :

On a $(AA') = 1.\overline{AI} + n.\overline{IJ} + 1.\overline{JA'}$ or dans le triangle droit IJC : $\cos i = \frac{IJ}{JC} = \frac{IJ}{R}$

$IJ = R.\cos i$

On a $B + i + \alpha = \pi$ $\qquad (\pi - r) + i + \alpha = \pi$ $\qquad \alpha = r - i$

Donc $\cos(r - i) = \frac{\overline{HA\prime}}{\overline{JA\prime}}$ $\Rightarrow$ $\overline{JA'} = \frac{\overline{HA\prime}}{\cos(r-i)}$

On a $\tan(r - i) = \frac{\overline{JH}}{\overline{HA\prime}}$ $\Rightarrow$ $\overline{HA'} = \frac{\overline{JH}}{\tan(r-i)}$

Or $\sin i = \frac{\overline{JH}}{\overline{JC}}$ $\Longrightarrow$ $\overline{JH} = R.\sin i$

Donc: $\overline{JA'} = \frac{\overline{HA'}}{\cos(r-i)} = \frac{1}{\cos(r-i)} \cdot \frac{\overline{JH}}{\tan(r-i)} = \frac{1}{\cancel{\cos(r-i)}} \cdot \frac{\cancel{\cos(r-i)}}{\sin(r-i)} . R.\sin(i) \Longrightarrow$ $\overline{JA'} = \frac{R.\sin(i)}{\sin(r-i)}$

D'où le chemin optique (AA') est donc :

$$(AA') = AI + n.R.\cos(i) + \frac{R.\sin(i)}{\sin(r-i)}$$

2) La position de A' dépend de l'angle i c'est-à-dire pour deux angles d'incidence différents on aura 2 images différentes => on ne peut pas réaliser le stigmatisme
3) CA' en fonction de R, i et r

On a $\overline{CA'} = \overline{CH} + \overline{HA'}$ *or* : $\overline{HA'} = \frac{\overline{JH}}{\tan(r-i)} = \frac{R.\sin i}{\tan(r-i)}$

Et : $\overline{CH} = R.\cos(i)$

$\Longrightarrow$ $\overline{CA'} = R.\cos(i) + \frac{R.\sin i}{\tan(r-i)}$

Ou bien :

On considère le triangle CA'I

$$\frac{\overline{CI}}{\sin(\alpha)} = \frac{\overline{CA'}}{\sin(\pi-\alpha-\beta)} = \frac{\overline{CA}}{\sin(\pi-r)} \Longrightarrow \frac{\overline{CI}}{\sin(r-i)} = \frac{\overline{CA'}}{\sin(\pi-r)} = \frac{\overline{CA'}}{\sin(r)}$$

$$\Longrightarrow \frac{R}{\sin(r)\cos(i) - \sin(i)\cos(r)} = \frac{\overline{CA'}}{\sin(r)}$$

$$\Longrightarrow \overline{CA'} = \frac{R.\cancel{\sin(r)}}{\cancel{\sin(r)}\cos(i) - \frac{\cancel{\sin(r)}}{n}\cos(r)} = \frac{nR}{n\cos(i) - \cos(r)}$$

Les deux expressions de $\overline{CA'}$ sont valables et équivalents.

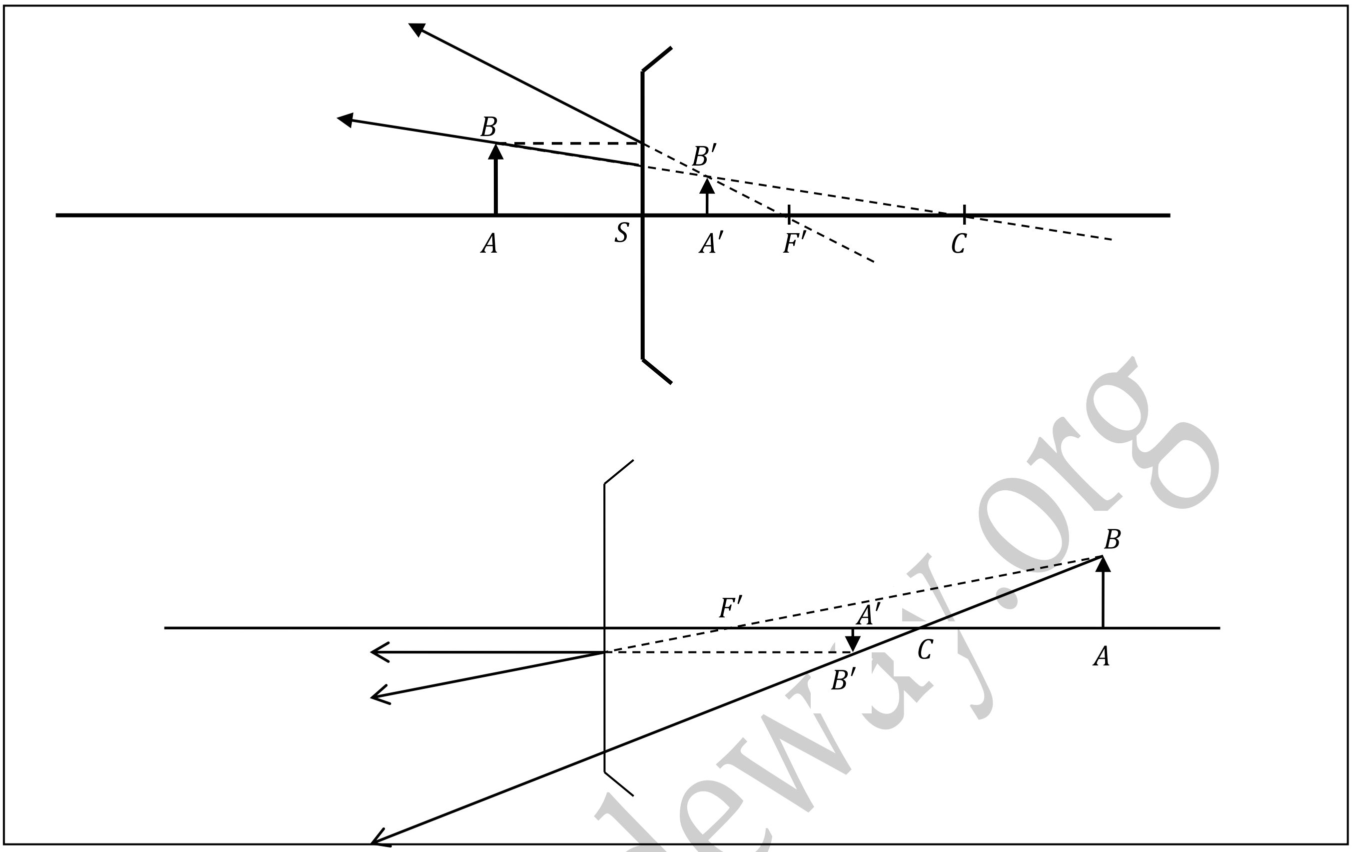
a. Pour $i \to l$ $\Longrightarrow$ $\overline{CA'}_l = \frac{nR}{n\cos(l)} = \frac{R}{\cos(l)}$ $\Longrightarrow l = \arcsin(\frac{1}{n})$
b. Pour $i \to 0$ $\Longrightarrow$ $\overline{CA'}_0 = \frac{nR}{n-1}$

Donc l'image est située au segment $[A'_0 , A'_2]$.

Exercice II

Miroir convexe de sommet S et de centre C, SC = 4cm

1) AB est réel de hauteur 1cm, placé à 2 m du sommet S



B)

1) $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$ $\quad\Longrightarrow \overline{SA} = -\overline{SA'}\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = -2m$

2) On a $\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}}$ $\quad\Longrightarrow \overline{SC} = 2\,\frac{\overline{SA} * \overline{SA'}}{\overline{SA} + \overline{SA'}}$

$$\Longrightarrow \overline{SC} = -3{,}2m$$

$$\Longrightarrow f = \frac{SC}{2} = 1{,}6m$$

Exercice III :

1) Formule de conjugaison : $\frac{n-n'}{\overline{SC}} = \frac{n}{\overline{SA'}} - \frac{n'}{\overline{SA}}$

a. Objet réel => $\overline{SA} = -20cm$

A => $\frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{n-n'}{\overline{SC}} + \frac{n'}{\overline{SA}}$

=> $\overline{SA'} = \frac{n'}{\frac{n'-n}{\overline{SC}} + \frac{n}{\overline{SA}}}$

$n = 1,\quad n' = 1.5,\ SC = 20cm,\quad \overline{SA} = -20cm$

AN : $\overline{SA'} = 60cm$

Le grandissement a pour expression : $\gamma = \frac{n\overline{SA'}}{n'\overline{SA}} = 2$

b. Objet virtuel $\overline{SA} = +10cm$

De même $\overline{SA'} = \frac{n'}{\frac{n'-n}{\overline{SC}} + \frac{n}{\overline{SA}}} = 12cm$ image réelle

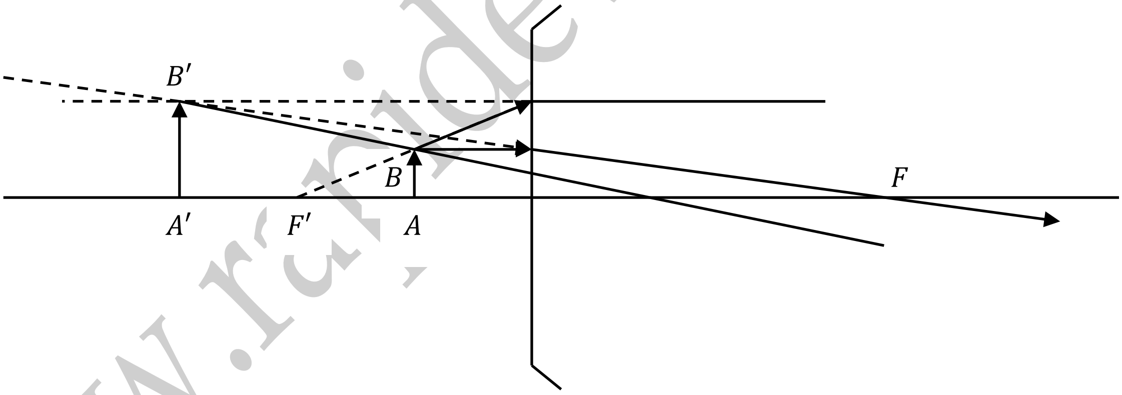
$$\gamma = \frac{n\overline{SA'}}{n'\overline{SA}} = +0,8$$

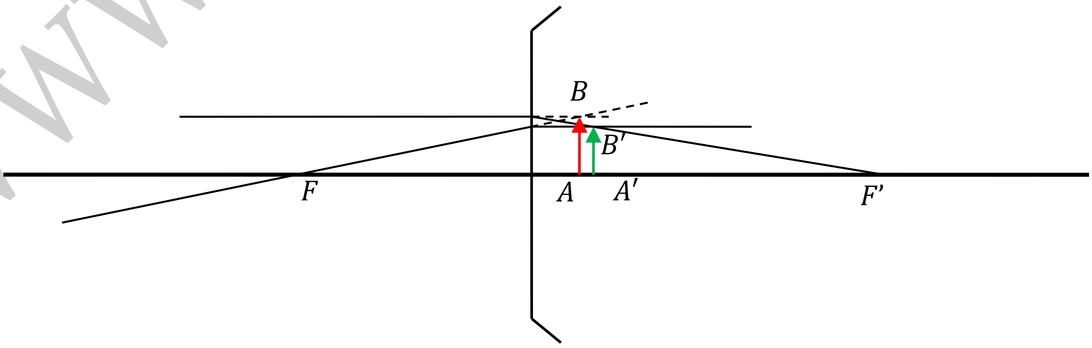
2)

a. Pour réaliser la construction nous avons besoin de connaitre les positions des foyers objet F et foyer image F'

On a $\overline{SF} = n\frac{\overline{SC}}{n-n'} = -40cm$

Et $\overline{SF'} = n'\frac{\overline{SC}}{n'-n} = 60cm$





b. le dioptre est convergent :

Les constructions sont en accord avec les calculs

3) Objet particulier

a. Si $\overline{SA} = -40\text{cm}$ on a alors $A \equiv F$

L'objet confondu avec le foyer donc l'image à l'infini $\overline{SA'} \to \infty$

b. Si $\overline{SA} = 60\text{cm}$ on a alors l'objet placé au foyer image ce n'est pas une position particulière donc on ne peut pas conclure

Contrôle N : $1/2$ optique 1 Filière SMPC/SMA 2004-2005 FSSM :

Question de cours

Enoncer le principe de Fermat

1) Déduire, du principe de Fermat, le trajet de la lumière dans un milieu homogène d'indice n
2) Définir le stigmatisme rigoureux et donner un exemple de système optique rigoureusement stigmatique.
3) Soit un dioptre sphérique de centre C et de sommet S qui sépare deux milieux d'indice respectifs n et n'
   a- Rappeler la relation de conjugaison avec origine au sommet pour un couple (A, A')
   b- En déduire les expressions des distance focales f et f' en fonction de n, n' et $\overline{SC}$
   c- Peut-on avoir $f = f'$? Justifier votre réponse.

Exercice 1

On considère une lame de verre à faces parallèles, d'indice $n = 1{,}5$ et d'épaisseur $e = 2$ cm placée dans un milieu d'indice de réfraction égale à 1.

1) Un rayon lumineux SI (Venet d'une source S) tombe sur la lame en un point I sous un angle d'incidence $i = 45°$
   a- Calculer la valeur de l'angle de réfraction r à l'intérieur de la lame.
   b- Déterminer l'expression du déplacement latéral Δ que que subit le rayon incident SI lors de la traversée de la lame. Calculer la valeur de Δ
2) On suppose que la lame vérifie les conditions d'approximation de Gauss. Soit A un point lumineux situé à 4 cm de la première face de la lame (Voir figure 1)
   a- Construire géométriquement l'image A' de A donnée par la lame. En déduire sa nature
   b- Déterminer $\overline{AA'}$ dans les conditions de l'approximation de Gauss (faire la démonstration). Calculer la valeur de $\overline{AA'}$.

Corrigée de Contrôle N : $1/2$ optique 1 Filière SMPC/SMA 2004-2005 FSSM

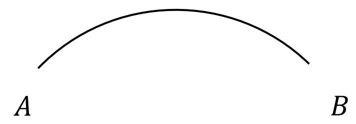
Question de cours

Enoncé du principe de Fermat :

Le trajet suivit par les rayons lumineux pour aller d'un point M_1 vers un point M_2 est celui pour lequel le chemin optique est extremum « $dl = 0$ ».

Pour aller d'un point à un autre, la lumière suit le trajet dont le chemin optique est extrémal → le trajet est tel que la durée est extrémale.

1. $L = \int_{AB} n \, dl$



2. Soit un point objet A qui envoi des rayons lumineux sur un système optique S. Si tous les rayons sont arts du système S passant par un seul point A'. On dit que S est alors rigoureusement stigmatique pour le couple de points conjuguée A et A'.

Exemple : miroir plan, les lentilles.

3.
   1. Relation de conjugaison d'un dioptre sphérique.

$\frac{n'}{\overline{CA'}} - \frac{n}{\overline{SA}} = \frac{n'-n}{\overline{CS}}$ D'origine au sommet

   2. Le foyer objet f est un point défini quand l'image est à l'infini, c.à.d. A' à l'infini

$$\frac{(n'-n)}{\overline{CS}} = (0) - \frac{n}{\overline{SF}} \Rightarrow f = \overline{SF} = n\frac{\overline{CS}}{(n-n')} \ (2)$$

Le foyer image F' est un point image tel que l'objet est à l'infini

$$\frac{(n'-n)}{\overline{CS}} = \frac{n'}{\overline{SF'}} - (0) \Rightarrow f' = \overline{SF'} = \frac{n'.\overline{SC}}{(n'-n)}$$

   3. D'après (1) et (2) $\frac{\overline{SF}}{\overline{SF'}} = \frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}$
   Pour $n = n' \Rightarrow f = -f'$

Exercice I:

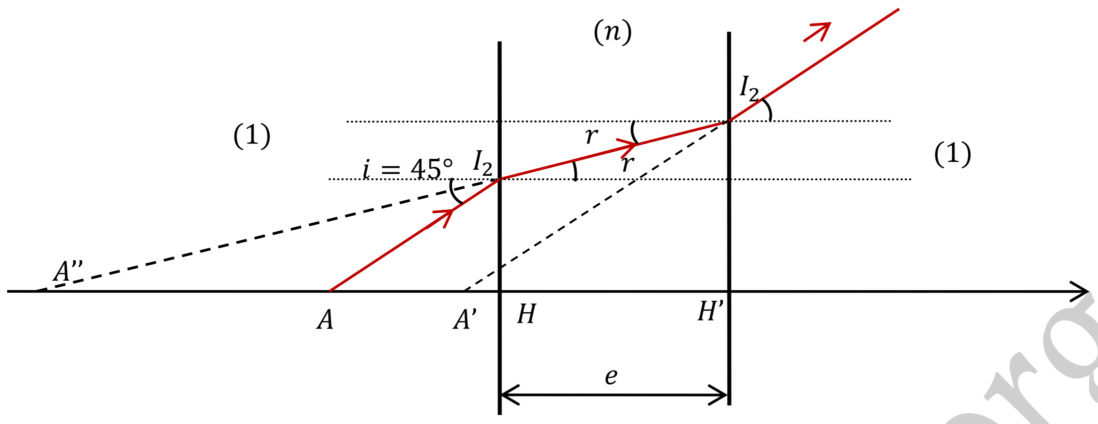


figure : 1

1.

1. D'après la loi de *Scnell – Descrat* :

$$1\sin(i) = n\sin(r) \Longrightarrow \sin(r) = \frac{\sin(i)}{n} \Longrightarrow r = arcsin\left(\frac{\sin(i)}{n}\right)$$

$$AN: \qquad r = arcsin\left(\frac{\sin(45)}{1{,}5}\right) = 28{,}12$$

On a $\cos(r) = \frac{e}{\Delta} \Longrightarrow \Delta = \frac{e}{\cos(r)} = \frac{2}{\cos(28)} = 2{,}267$

2.

1. Construction géométrique de l'image A' de A donnée par la lame (voir figure 1)

Nature de l'image : virtuelle

La face D_1 donne l'image A'' $(A \Longrightarrow A'')$ voir figure 1

$$\Longrightarrow \frac{HA''}{n} = \frac{HA}{1}$$

La face D_2 donne l'image A' $(A' \Longrightarrow A')$

$$\frac{H'A'}{1} = \frac{H'A''}{n}$$

$$\overline{AA'} = \overline{AH} + \overline{HH'} + \overline{H'A'} = ??$$

$$On\ a \quad \overline{A'H'} = \frac{\overline{H'H}}{n} + \frac{\overline{H'A''}}{n} = \frac{\overline{H'H}}{n} + \overline{HA}$$

$$\Longrightarrow \overline{AA'} = \overline{AH} + \overline{HH'} + \overline{H'A'} = \overline{AH} + \overline{HH'} + \overline{HA} + \frac{\overline{H'H}}{n} = \cancel{\overline{HA}} + \cancel{\overline{AH}} + \overline{HH'} + \frac{\overline{H'H}}{n}$$

$$\Longrightarrow \overline{AA'} = \overline{HH'} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad or: \overline{HH'} = e$$

Alors : $\overline{AA'} = e\left(\frac{n-1}{n}\right)$

AN : $\overline{AA'} = 2.\left(\frac{1,5-1}{1,5}\right) = -0,666\ cm\ (la\ signe\ moin\ car\ l'image\ est\ virtuelle).$

Exercice II

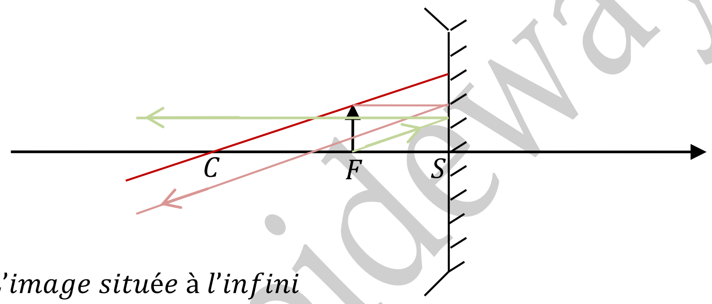
1. les applications des approximations de Gauss sert à simplifier les formule et rendre les calcule simple.
2. Miroir sphérique convergent (concave)

a. On a la relation de conjugaison :

$$\frac{2}{\overline{SC}} = \frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} \qquad l'image\ \ a\ l'infini\ \Rightarrow \frac{2}{\overline{SC}} = \frac{1}{\overline{SA}}$$

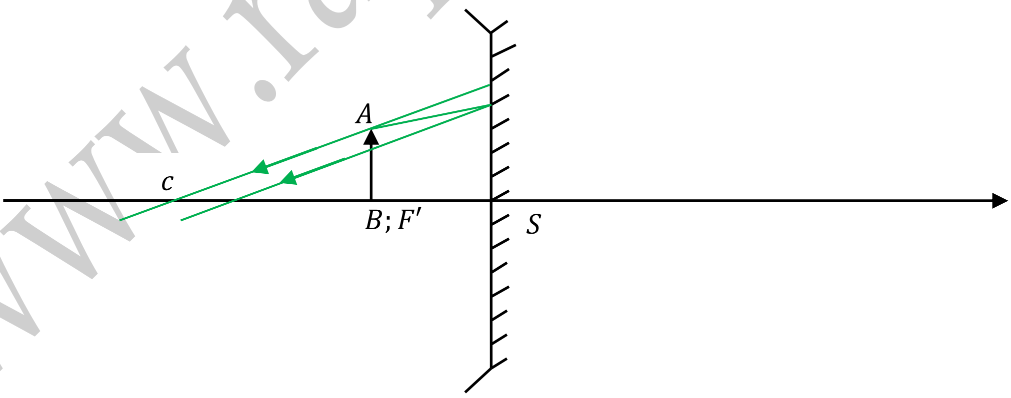
$$\overline{SA} = \frac{\overline{SC}}{2} = f'$$

Donc l'objet doit être placé au foyer du miroir



$L'image\ située\ à\ l'infini$

b.



c. L'image est réelle situé à l'infini agrandie par rapport à AB et renversée (sens apposé de l'objet)

d. Calcule de la position de l'image

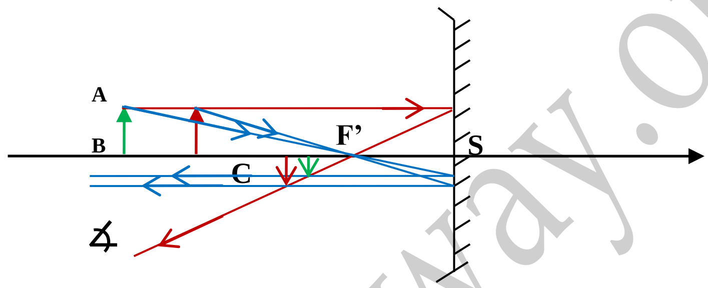
Formule de conjugaison : $\frac{2}{\overline{SC}} = \frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} \Rightarrow \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}} - \frac{1}{\overline{SA}}$

$$\Rightarrow \overline{SA'} = \frac{\overline{SC} * \overline{SA}}{2\overline{SA} - \overline{SC}}$$

AN : $\overline{SC} = -20\ Cm$ et $\overline{SA} = -10\ Cm$ $\quad \overline{SA'} = \frac{(-10)*(-20)}{2(-10)-(20)} = \infty$

L'image située à l'infini

4. Pour obtenir l'image renversée, je fais rapprocher l'objet du miroir



3. On a $\Gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$ avec $\overline{SA'} = -0,5\ m = 50\ cm$ et $\overline{SA} = -10cm$

$$\Gamma = \frac{50}{10} = 5$$

Le grandissement $\Gamma = 5 \Rightarrow$ 5 fois plus grand que l'objet

ALGEBRE :

Contrôle N : **2** Algèbre I Filière SMPC- FSSM **:**

Exercice I

On considère l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$et en détermine.
2) Déterminer un sous-espace vectoriel supplémentaire G de F dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice II.

On considère la matrice la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2 en fonction de A et de I_2ou $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2) Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), MA^2 = A^2M \Leftrightarrow MA = AM$.
3) Calculer A^8.

Exercice III

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(e_1) - (1,0,2), \qquad f(e_2) = (0,1,1)\ et\ f(e_3) = (1,-2,0)$$

1) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $f(x, y, z)$.
2) Déterminer une base de $Ker(f)$ et une base de $Im(f)$.
3) Montrer que $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont deux sous-espèces supplémentaire de $\mathbb{R}^3$.
4) Soient $u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,-1,0)\ et\ u_3 = (1,0,0)$. Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
5) Déterminer la matrice de passage, $P_{B,B'}$, de $\mathcal{B}\ a\ \mathcal{B}'$ et calculer son inverse.
6) Déterminer la matrice $mat(f; \mathcal{B}')$ de f par rapport à la base $\mathcal{B}'$.

....

Corrigée de Contrôle N : 2 Algèbre I Filière SMPC- FSSM

Exercice I.

On considère l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$

1) Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

- On a $(0,0,0) \in F$ car $0 + 0 + 0 = 0$

$$\Longrightarrow F \neq \emptyset$$

- Soient $u(x, y, z) \in F \; et \; v(x', y', z') \in F$

$$u \in F \to x + y + z = 0$$
$$v \in F \to x'+y'+z' = 0$$
$$u + v = (x + y + z) + (x'+y'+z') = 0$$
$$= (x + x') + (y + y') + (z + z') = 0$$
$$d'ou \; u + v \in F$$

- Soit $\lambda \in \mathbb{R} \; et \; u(x, y, z) \in F$

$$\lambda u = \lambda(x + y + z) = 0$$

$$= (\lambda x) + (\lambda y) + (\lambda z) = 0$$

$$donc \; \lambda u \in F$$

Conclusion F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

- Cherchons une base de F.

On a $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; / \; x + y + z = 0\}$
$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \; z = -x - y\}$
$= \{(x, y, -x - y) \; / \; x, y \in \mathbb{R}\}$
$\{x(1,0,1) + y(0,1,1) / \; x, y \in \mathbb{R}\}$
$= vect\{(1,0,1), (0,1,1)\}$

Soient $\alpha \; et \beta \; \in \; \mathbb{R} \; \alpha(1,0,-1) + \beta(0,1,-1) = (0,0,0)$

$$\Longrightarrow (\alpha, 0, -\alpha) + (0, \beta, -\beta) = (0,0,0)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha + 0 = 0 \\ 0 + \beta = 0 \\ -\alpha - \beta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$$

Donc $\{(1,0,-1), (0,1,-1)\}$ est libre et par la suite $\{(1,0,-1), (0,1,-1)\}$ est une base de F

2) Déterminons un sous-espace vectoriel supplémentaire $G \; de \; F \; dans \; \mathbb{R}^3$ soit G un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$engendré par le vecteur $w = (1,1,2)$ (choix).
On a $(x, y, z) \in F$ si et seulement si $x + y + z = 0 \Longrightarrow z = -x - y$ Et $(x, y, z) \in G$ si et seulement si $2z = x = y$ donc $(x, y, z) \in F \cap G$ si et seulement si $x = y = z = 0$ d'où $F \cap G = \{0\}$
On a $\begin{Bmatrix} dimF + dimG = 2 + 1 = 3 = dim\mathbb{R}^3 \\ F \cap G = \{0\} \end{Bmatrix} \Longrightarrow \mathbb{R}^3 = F \oplus G$

Alors G est un sous-espace vectoriel supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$

Exercice II.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Calculer A^2

On a $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow A^2 = A + I_2$$

2) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On a $A^2 = A + I_2$

$$MA^2 = M(A + I_2)$$

$$MA^2 = MA + MI_2$$

On a $MA = AM$ *et* $MI_2 = I_2M$

$$\Longrightarrow MA^2 = AM + I_2M$$

$$MA^2 = (A + I_2)M$$

$$MA^2 = A^2M$$

On a $A^2 = A + I_2$

$$\Longrightarrow A = A^2 - I_2$$

$$MA = M(A^2 - I_2)$$

$$= MA^2 - MI_2$$

On a $MA^2 = A^2M$ *et* $MI_2 = I_2M$

$$\Longrightarrow MA = A^2M - I_2M$$

$$= (A^2 - I_2)M$$

$$MA = AM$$

Finalement $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); MA^2 = A^2M \Leftrightarrow MA = AM.$

3) Calculons A^8

On a $A^4 = A^2A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Donc $A^8 = A^4A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 35 \\ 21 & 19 \end{pmatrix}$

Exercice III.

Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ avec $e_1(1,0,0), e_2(0,1,0)$ *et* $e_3(0,0,1)$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$défini par :

$$f(e_1) = (1,0,2); f(e_2) = (0,1,1) \text{ et } f(e_3) = (1,-2,0)$$

1) Calculons $f(x, y, z)$

Soit A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z) = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ avec } A = \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z \\ y - 2z \\ 2x + y \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow f(x,y,z)=(x+z,y-2z,2x+y)$$

Ou bien $f(x,y,z)=xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3)$

$$=x(1,0,2)+y(0,1,1)+z(1,-2,0)$$

$$=(x,0,2x)+(0,y,y)+(z,-2z,0)$$

$$f(x,y,z)=(x+z,y-2z,2x+y)$$

2) Base de $ker(f)$

On a $Ker(f)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/f(x,y,z)=0_{\mathbb{R}^3}\}$

$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\begin{pmatrix}x+y\\ y-2z\\ 2x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$Ker=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /x+z=0\ et\ y-2z=0\ et\ 2x+y=0\}$

$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x=-z\ et\ y=2z\}$

$=\{(-z,2z,z)\ /z\in\mathbb{R}\}$

$=z(-1,2,1)$

$=vect\{(-1,2,1)\}$

Donc $(-1,2,1)$ est une base de $Ker(f)$ et $dimKer\ (f)=1$

- Base de $Im(f)$

Soit $(x',y',z')\longrightarrow Im(f)\ \Longrightarrow \exists(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ telque\ f(x,y,z)=(x',y',z')$

$$\Longrightarrow\begin{cases}x+z=x'\\ y-2z=y'\\ 2x+y=z'\end{cases}\Longrightarrow 2x'+y'=2x+2z+y-2z$$

$$=2x+y$$

$$=z'$$

Donc : $2x'+y'=z'$

$Im(f)=\{(x',y',z')\in\mathbb{R}^3\ /\ 2x'+y'=z'\ \}$

$=\{(x',y',2x'+y')/\ x',y'\in\mathbb{R}\ \}$

$=\{x'(1,0,2)+y'(0,1,1)\ /\ x',y'\in\mathbb{R}\}$

$=vect\{(1,0,2),(0,1,1)\}$

Donc $\{(1,0,2),(0,1,1)\}$ est une base de $Im(f)$ et $Im(f)$ et $dim\ Im(f)=2$

3) On $det\{(-1,2,1),(1,0,2),(0,1,1)\}=\begin{vmatrix}-1&1&0\\2&0&1\\1&2&1\end{vmatrix}$

$=-1\begin{vmatrix}0&1\\2&1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}2&0\\1&2\end{vmatrix}$

$=2-1=1\neq 0$

$donc\ \ Ker(f)+\dim\ Im(f)=1+2=3=dim\mathbb{R}^3$

$d'ou\ Ker(f)\ et\ Im(f)\ sont\ deux\ sous-espace\ supplementaire\ de\ \mathbb{R}^3$

4) Soient $u_1=(1,1,1),u_2=(1,-1,0),u_3=(1,0,0)$

- Montrons que la famille $\{u_1,u_2,u_3\}$ est libre

$$detB'=det(u_1,u_2,u_3)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=0-0+1=1\neq 0$$

$detB' \neq 0 \Longrightarrow B' = est\ libre$

On a $B' = (u_1, u_2, u_3) \Longrightarrow \dim B' = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

Comme B' est libre et $\dim B' = \dim \mathbb{R}^3$ alors B' est une base de $\mathbb{R}^3$

Ou bien :

Soient $\alpha, \beta\ et\ \gamma\ \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha u + \beta u + \gamma u = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\Longrightarrow \alpha(1,1,1) + \beta(1,-1,0) + \gamma(0,1,1) = (0,0,0)$$

$$\Longrightarrow (\alpha, \alpha, \alpha) + (\beta, -\beta, 0) + (0, \gamma, \gamma) = (0,0,0)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \to 0 + 0 + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \to 0 - \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Comme $\alpha = \beta = \gamma = 0$ alors B' est libre de plus $\dim B' = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ alors B' est une base de $\mathbb{R}^3$.

5) La matrice de passage $P_{B,B'}$

$$P_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \quad (\text{colonnes } u_1, u_2, u_3) \Longrightarrow \begin{cases} u_1 = (1,1,1) = e_1 + e_2 + e_3 \\ u_2 = (1,-1,0) = e_1 - e_2 + 0e_3 \\ u_3 = (0,1,1) = e_1 + 0e_2 + 0e_3 \end{cases}$$

$$P_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons $P_{B,B'}^{-1}$

$$\text{On a } \begin{cases} u_1 = e_1 + e_2 + e_3\ (1) \\ u_2 = e_1 - e_2\ (2) \\ u_3 = e_1 (3) \end{cases}$$

$$(2)\ e_2 = e_1 - u_2$$

$$\Longrightarrow \quad e_2 = u_3 - u_2\ /\ u_3 = e_1\ \to\ equation \qquad (3)$$

$(3)\ et\ (2)\ dans\ (1)\ \Longrightarrow u_1 = e_1 + u_3 - u_2 + u_3 \Rightarrow e_1 = u_1 + u_2 - 2u_3$

$$\Longrightarrow \begin{cases} e_1 = u_1 + u_2 - 2u_3 \\ e_2 = -u_2 + u_3 \\ e_3 = u_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} e_1 = (1,1,-2) \\ e_2 = (0,-1,1) \\ e_3 = (0,0,1) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow P_{B,B'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{matrix} \quad (\text{colonnes } e_1, e_2, e_3)$$

6) Determinant la matrices $mat(f, B')$

On a $mat(f, B') = P_{B,B'}^{-1}.mat(f, B).P_{B,B'}$

Avec $mat(f,B) = \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & \\ 1 & 0 & 1 & e_1 \\ 0 & 1 & -2 & e_2 \\ 2 & 1 & 0 & e_3 \end{matrix}$

Donc la matrice $mat(f,B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

ALGÈBRE I FILIÈRE SMPC- FSSM :

Contrôle rattrapage

Exercice 1

On considère l'ensemble $\mathcal{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, 2x - y + z = 0\,\}$

1) Montre que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer une base de $\mathcal{F}$.
3) Soient $u = (1,1,1)$ et $G = vect(u)$. Montre que $\mathcal{F} \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Exercice 2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Calculer $f(x, y, z)$pour$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
2) Déterminer une base de $\ker(f)$ et la dimension de $Im(f)$. Soient $u_1 = (0,0,1)$, $u_2 = (1, -1,1)$ et $u_3(2, -1,0)$.
3) Montrer que la famille $B_1(u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4) Déterminer la matrice de passage P de B à B_1 et son inverse P^{-1}.
5) Déterminer la matrice A_1 de f par rapport à la base B_1.

Exercice 3

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer la matrice B telle que $A = B + I_3$ ou I_3 est la matrice unité d'ordre 3.
2) Calculer B^2 et B^3.
3) Calculer A^n $pour\ n \in \mathbb{N}^*$.

Corrigée de Contrôle rattrapage Algèbre

Exercice 1

On considère l'ensemble, $\mathcal{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, 2x - y + z = 0\}$

1) Montrons que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   - $\mathcal{F} \neq \emptyset$ car on a $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3 \Longrightarrow 2 * 0 - 0 + 0 = 0$
   - Soient $u(x, y, z) \in F$ et $v(x', y', z') \in F$
     $u \in F \Longrightarrow 2x - y + z = 0$
     $v \in F \Longrightarrow 2x' - y' + z' = 0$

$$u + v = (2x - y + z) + (2x' - y' + z') = 0$$
$$2(x + x') - (y + y') + (z + z') = 0$$

D'où $u + v \in F$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u(x, y, z) \in F$

$$\lambda u = \lambda(2x - y + z) = 0$$
$$= (2\lambda x - y\lambda + z\lambda) = 0$$

$\Longrightarrow \lambda u \in F$

Conclusion : f est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminons une base de F

On a : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + z = 0\}$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = -2x + y\}$$

$= \{(x, y, -2x + y) \in \mathbb{R}^3 / x, y \in \mathbb{R}\}$

$= vect\{(1,0,-2), (0,1,1)\}$

Soient $\alpha , \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha(1,0,-2) + \beta(0,1,1) = (0,0,0)$

$$\Longrightarrow \alpha(\alpha, 0, -\alpha) + \beta(0, \beta, \beta) = (0,0,0)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ -2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$$

Donc : $\{(1,0,-2), (0,1,1)\}$ est une base de F et $\dim F = 2$.

3) Montrons que $\mathcal{F} \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Soit $(x,y,z) \in F \Longrightarrow 2x - y + z = 0$

Et $(x,y,z) \in G \Longrightarrow x = y = z$

Soit $(x,y,z) \in F \cap G \Longrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x = y = z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x - x + x = 0 \\ x = y = z = 0 \end{cases}$

$Donc : F \cap G = (0,0,0) et \ + dimG = 2 + 1 = 3$.

$D'où : \mathcal{F} \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Exercice 2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Calculons $f(x,y,z)$

$$(x,y,z) \in f \Longrightarrow f(x,y,z) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3)$$

Avec : $f(e_1) = (2,0,3)$, $f(e_2) = (1,-1,1)$ et $f(e_3) = (1,1,2)$

$$f(x,y,z) = x(2,0,3) + y(1,-1,1) + z(1,1,2)$$

$$= (2x, 0,3x) + (y, -y, y) + (z, z, 2z)$$

$$= (2x + y + z\ , -y + z\ , 3x + y + 2z)$$

2) Base de $ker(f)$

On a : $ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(x,y,z) = 0\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (2x + y + z\ , -y + z\ , 3x + y + 2z) = (0,0,0)$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (\underbrace{2x + y + z = 0}_{A}, \underbrace{-y + z = 0}_{B}, \underbrace{3x + y + 2z = 0}_{C})$$

$B \Longrightarrow z = y$ et B dans A $\Longrightarrow 2x + y + y = 0 \Longrightarrow x = -y$

⇨ $x = -y = -z$

Donc : $ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = -y = -z\}$

$$= \{(x,-x,-x)\ /\ x \in \mathbb{R}\}$$

$$= vect\{(1,-1,-1)\}\ dimker(f) = 1$$

{(1,-1,-1)} est une base de $ker(f)$

- Dimension de $Im(f)$
  On a : $dim\mathbb{R}^3 = \dim kerf(f) + \dim Im(f)$
  $$\Longrightarrow \dim Im(f) = dim\mathbb{R}^3 - \dim kerf(f) = 3 - 1 = 2$$

3) Montrons que B_1 est une base de $\mathbb{R}^3$

Soient $\alpha, \beta, et\ \gamma\ \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma\, u_3 = 0$

$$\Longrightarrow \alpha(0,0,1) + \beta(1,-1,1) + \gamma(2,-1,0) = (0,0,0)$$

$$\Longrightarrow (0,0,\alpha) + (\beta,-\beta,\beta) + \gamma(2\gamma,-\gamma,0) = (0,0,0)$$

$$\Longrightarrow (0, \beta + 2\gamma\ , 0 - \beta - \gamma\ , \alpha + \beta + 0\ ) = (0,0,0)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \beta + 2\gamma = 0\ (1) \\ -\beta - \gamma = 0\ (2) \\ \alpha + \beta = 0 \quad (3) \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

On a la famille B_1 est libre, de plus $dimB_1 = 3 = dim\mathbb{R}^3$ alors B_1 est une base de$\mathbb{R}^3$.

4) La matrice de passage P de B à B_1

On a $u_1(0,0,1) = 0e_1 + 0e_2 + e_3$

$$u_2 = (1,-1,1) = e_1 - e_2 + e_3$$

$$u_2 = (2,-1,0) = 2e_1 - e_2 + 0.e_3$$

$$\Longrightarrow P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice inverse P^{-1} :

On a : $\begin{cases} u_1 = e_3 & (1) \\ u_2 = e_1 - e_2 + e_3 & (2) \\ u_3 = 2e_1 - e_2 & (3) \end{cases}$

L'équation (3) $\Longrightarrow e_2 = 2e_1 - u_3$

L'équation (2) $\Longrightarrow e_2 = e_1 + e_3 - u_2 = u_1 + e_1 - u_2$

Alors : (3)-(2) $\Longrightarrow e_1 = u_1 - u_2 + u_3$

L'équation (3) $\Longrightarrow e_2 = 2u_1 - 2u_2 + u_3$

Donc : $\begin{cases} e_1 = u_1 - u_2 + u_3 \\ e_2 = 2u_1 - 2u_2 + u_3 \\ e_3 = u_1 \end{cases} \Rightarrow P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5) La matrice A_1 de f par rapport à la base B_1

On a : $A_1 = P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 10 \\ -3 & -6 & -5 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$Donc: A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 10 \\ -3 & -6 & -5 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

1) Déterminons la matrice B

On a : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B + I_3 \quad avec \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) On a : $B^2 = B.B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ET : $B^3 = B^2.B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) On a : $A = B + I_3$

$$\Rightarrow A^n = (B + I_3)^n = \sum_{k-1}^{n} C_n{}^k B^k I_3^{n-k}$$

$$\Rightarrow A^n = \sum_{k=1}^{2} C_2^k B^k I_3^{1-k} + \sum_{k=3}^{2} C_n^k B^k I^{n-k}$$

Pour k=3 on a: $B^3 = 0$

ANALYSE :

Exercice

Calculer les intégrales suivant :

- $\int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2}$;
- $\int_1^2 \frac{x^3 dx}{(1+x^4)^2}$;
- $\int_{-2}^{-1} \frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}}$
- $\int_1^2 \frac{dt}{t(1+t)}$
- $\int_1^2 \frac{Log(1+t)}{t^2} dt$
- $\int_{-1}^0 \frac{x}{x^2+2x-3} dx$

On pose pour tout entier naturel n non nul,

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$$

1) Montrer que $I_n$existe et est un nombre strictement positif.
   CalculerI_1.

2) Démontrer que, pour tout n de N, $I_{n+1} = \frac{-1}{e} + (n+1)I_n$ Calculer alors $I_2 et\ I_3$.
3) En déduire la valeur de $I_n = \int_0^1 (-x^3+2x^2 - x)e^{-x} dx$
4) Calculer les intégrales :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} Arctgx dx \ ; \int_0^1 \frac{x^4\ +1}{x^6+1} dx\ \ et \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^4 x sin^2 x dx$$

Corrigée :

- Calcul : $I = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2}$ on pose $J = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [Arctg\ t]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

On calcule l'intégrale$J$ par intégration par partie

On pose :$\begin{cases} u = \frac{1}{1+t^2} \\ v' = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u' = -\frac{2t}{(1+t^2)^2} \\ v = t \end{cases}$

Alors $J = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [u.v']_0^1 - \int_0^1 u'vdt$

$$= \left[\frac{t}{1+t^2}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{t^2dt}{(1+t^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2} + 2\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^2}dt$$

$$= \frac{1}{2} + 2\left[\int_0^1 \frac{t^2+1}{(1+t^2)^2}dt - \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}dt\right]$$

$$= \frac{1}{2} + 2\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}dt - 2\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}dt$$

$$J = \frac{1}{2} + 2J - 2I$$

$$2I = \frac{1}{2} + J \quad or \quad J = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2} = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$$

- $\int_1^2 \frac{x^3dx}{(1+x^4)^2}$ on pose : $u = x^4 \Longrightarrow du = 4x^3dx$

Quand $x = 1$ $u = 1$ et $x = 2$ $u = 16$

$$\int_1^2 \frac{x^3dx}{(1+x^4)^2} = \int_1^{16} \frac{1}{4}\cdot\frac{du}{(1+u)^2} = \frac{1}{4}\int_1^{16} \frac{d(1+u)}{(1+u)^2}$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1+u}\right]_1^{16} = \frac{15}{136}$$

- $\int_{-2}^{-1} \frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}} = \int_{-2}^{-1} \frac{dt}{t|t|\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}} = -\int_{-2}^{-1} \frac{dt}{t^2\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}$

On pose : $u = \frac{1}{t} \Longrightarrow du = -\frac{1}{t^2}dt. \begin{cases} t = -1 \\ t = -2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u = -1 \\ u = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$$\int_{-2}^{-1}\frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}}=\int_{-\frac{1}{2}}^{-1}\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=[Argsh(x)]_{-\frac{1}{2}}^{-1}$$

$$Argsh(-1)-Argsh(-\frac{1}{2})$$

$$Argsh\left(\frac{1}{2}\right)-Argsh(1)$$

$\int_1^2\frac{dt}{t(1+t)}$ On a $\frac{1}{t(1+t)}=\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}$

$$\int_1^2\frac{dt}{t(1+t)}=\int_1^2\frac{1}{t}dt+\int_1^2\frac{1}{1+t}dt=[Log(t)]_1^2+[Log|1+t|]_1^2$$

$$=2Log2-Log3=Log\left(\frac{4}{3}\right)$$

- Calcul de $\int_1^2\frac{Log(1+t)}{t^2}dt$

On fait une intégration par partie

On pose : $\begin{cases}u=Log(1+t)\\ v'=\frac{1}{1+t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u'=\frac{1}{t^2}dt\\ v=-\frac{1}{t}\end{cases}$

$$\int_1^2\frac{Log(1+t)}{t^2}dt=-\left[\frac{Log(1+t)}{t}\right]_1^2+\int_1^2\frac{dt}{1(1+t)}$$

$$=Log\frac{8}{\sqrt{27}}$$

- $\int_{-1}^0\frac{x}{x^2+2x-3}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^0\frac{2x}{x^2+2x-3}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^0\frac{2x+2}{x^2+2x-3}dx-\int_{-1}^0\frac{1}{x^2+2x-3}dx$

On a $\int_{-1}^0\frac{2x+2}{x^2+2x-3}dx=\int_{-1}^0\frac{(x^2+2x-3)'}{x^2+2x-3}dx=[Log(x^2+2x-3)]_{-1}^{0}=Log(\frac{3}{4})$

$$\int_{-1}^0\frac{1}{x^2+2x-3}dx=\int_{-1}^0\frac{1}{(x+1)^2-4}dx=\frac{1}{4}\int_{-1}^0\frac{1}{(\frac{x+1}{2})^2-1}dx$$

On pose : $\begin{cases}u=\frac{x+1}{2}\\ du=\frac{1}{2}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\Rightarrow u=0\\ x=0\Rightarrow u=\frac{1}{2}\end{cases}$

$$\int_{-1}^0\frac{1}{x^2+2x-3}dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2\,du}{u^2-1}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{du}{u^2-1}$$

On pose $\sin(x)=u\Rightarrow\cos(x)dx=du$

$$\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2+2x-3}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{\sin(\frac{1}{2})}\frac{\cos(x)\,dx}{sin^2(x)-1}or sin^2(x)-1=-cos^2(x)$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\sin(\frac{1}{2})}\frac{\cos(x)\,dx}{-cos^2(x)}=-\frac{1}{2}\int_{0}^{\sin(\frac{1}{2})}\frac{dx}{cos^2x}=\frac{1}{2}[tg(x)]_{0}^{\sin(\frac{1}{2})}$$

- $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}dx$

1) –la fonction $x\to x^n e^{-x}$ est continue sur [0 ,1] donc intégrable. On a de plus $\forall x\epsilon[0,1]\ x^n e^{-x}>0$l'intégrale sur [a, b] (avec b>a) d'une fonction continue > 0 sur [a, b] non identiquement nulle est strictement positive

$$\forall x\epsilon N^* I_n>0$$

$I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}dx$: Intégration par partie

$u=x et v'=e^{-x}$ $\qquad$ $u'=1\ \ et v=-e^{-x}$

On a:

$$\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}Arctgxdx=\int_0^1 Arctgxdx-\int_0^1\frac{1}{1+x^2}Arctgxdx$$

$$\int_0^1\frac{Arctgx}{1+x^2}dx=\int_0^1 Arctgxd(Arctgx)=\frac{1}{2}[(Arctgx)^2]_0^1=\frac{\pi^2}{32}$$

Pour calculer $\int_0^1 Arctgxdx$, intégrons par partie $u=Arctgx,\ dv=dx$

On obtient

$$\int_0^1 Arctgxdx=[xArctgx]_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}[Log(1+x^2)]_0^1=\frac{\pi}{4}-Log\sqrt{2}$$

D'où

$$\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}Arctgxdx=\frac{\pi^2}{32}+\frac{\pi}{4}-Log\sqrt{2}$$

- $\int_0^1\frac{x^4+1}{x^6+1}dx$

On décompose la fonction rationnelle en éléments simples.

On a$x^6+1=(x^2)^3+1=(x^2+1)(x^4-x^2+1)$

Et$x^4-x^2+1=(x^2+1)^2-3x^2=\left(x^2-\sqrt{3x}+1\right)(x^2+\sqrt{3x}+1)$

D'où

$$\frac{x^4+1}{x^6+1}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{Ex+F}{x^2+\sqrt{3}x+1}$$

La fonction $x\rightarrow\frac{x^4+1}{x^6+1}$ est paire. De l'unicité de la décomposition il résulte

$$A=0. \qquad C=-E et D=F$$

Multiplions par x^2+1 et on met $x=i$ on obtient $B=\frac{2}{3}$

Les valeurs $x=0$ et $x=1$ donnent $2F=\frac{1}{3}$ et $2F+C\sqrt{3}=\frac{1}{3}$, d'où

$F=\frac{1}{6} et C=0$

Il en résulte

$$\int_0^1\frac{x^4+1}{x^6+1}dx=\frac{2}{3}\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx+\frac{1}{6}\int_0^1\frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}+\frac{1}{6}\int_0^1\frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}$$

$$\int_0^1\frac{x^4+1}{x^6+1}dx=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{6}\times 2[Arctg\ 2\ (x-\frac{\sqrt{3}}{2})]_0^1+\frac{1}{6}\times 2[Arctg\ 2\ (x+\frac{\sqrt{3}}{2}]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{3}[Arctg\ 2(1-\frac{\sqrt{3}}{2})\ +Arctg\ 2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)]$$

On a

$$\frac{1}{2(1+\frac{\sqrt{3}}{2})}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}=2(1-\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$De\forall x\epsilon R^*, Arctgx+Arctg\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$Ondéduit$\int_0^1\frac{x^4+1}{x^6+1}dx=\frac{\pi}{3}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}cos^4xsin^2xdx$$

Les exposants de $sinx$et $\cos x$ sont pairs. On doit donc linéariser.

$$sin^2x=\frac{1-cos\ 2x}{2}$$

$$cos^4x=\left[\frac{1+cos\ 2x}{2}\right]=\frac{1}{4}[2+2cos\ 2x+\frac{1+cos\ 4x}{2}]$$

D'ou

$$sin^2xcos^4x = \frac{1}{16}[1 - cos2x][3 + 4cos2x + cos4x]$$

$$= \frac{1}{16}\left[3 + cos2x + cos\ 4x - 2(1 + cos4x) - \frac{1}{2}(cos6x + cos2x)\right]$$

C'est-à-dire

$$sin^2xcos^4x = \frac{1}{16}\left[1 + \frac{cos2x}{2} - cos4x - \frac{1}{2}cos6x\right]$$

On en déduit

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^4xsin^2xdx = \frac{1}{16}[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}]$$

Exercices:

Calculer les limites suivantes

1/ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$

2/ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n^3}\left(1+3^2+\cdots+(2n-1)^2\right)$

3/ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$

4/ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1^2n}}+\frac{2}{\sqrt[3]{n^3+2^2n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n^2n}}\right)$

5/ *déterminer la valeur moyenne de*

$\tan x$ *Entre* $\frac{\pi}{6}$ *et* $\frac{\pi}{3}$

Exercice 1 :

1/ on a $\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n} = \frac{1}{n}\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}+\frac{1}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}+\cdots+\frac{1}{n\left(1+\frac{n}{n}\right)}$

$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}+\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)}+\cdots+\frac{1}{\left(1+\frac{n}{n}\right)}\right)$

$\frac{b-a}{n}$ x $f\left(\frac{k}{n}\right)$

C'est la somme de Riemann Relative à la fonction $f(x)=\frac{1}{1+x}$ et la supdivision $\sigma_n=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,\frac{n}{n}\right\}$

$f(x)$ Est continue sur $[0,1]$

On a $\frac{1}{n}=\frac{b-a}{n}$

Pour $a=0$

$b-a=1$

⇨ $b=1$

$a=0$ *Et* $b=1$

$[a,b]=[0,1]$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=[\ln(1+n)]_0^1 = \ln(2)-\ln(1)$

$=\ln 2$

2/ $U_n=\frac{1}{4n^3}\left(1+3^2+\cdots+(2n-1)^2\right)=\frac{1}{n}*\frac{1}{(2n)^2}\left(1+3^2+\cdots+(2n-1)^2\right)$

$$= \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{2n}\right)^2 + \left(\frac{3}{2n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2\right)$$

$\frac{b-a}{n}$ (flèche vers $\frac{1}{n}$) ; x (flèche vers $\frac{1}{2n}$)

C'est la somme de Riemann Relative à la fonction $f(x) = x^2$ *et la subdivision* $\sigma_i = \frac{2i-1}{2n}$

$f(x)$ *Est continue sur* $[0,1]$

$$lim_{n\to\infty} U_n = \int_0^1 x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

3/ *On a* $U_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} = \frac{1}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}} + \frac{1}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)}} + \cdots$

$$= \frac{1}{n\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}} + \frac{1}{n\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}} \quad ; \forall n > 0$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right)$$

$\frac{b-a}{n}$ (flèche vers $\frac{1}{n}$) ; x (flèche vers $\frac{1}{n}$)

C'est la somme de Riemann Relative à la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ *et la subdivision* $\sigma_i = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}\right\}$

$f(x)$ *Est continue sur* $[0,1]$

$$lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = [Arg\ sh\ (x)]_0^1$$

On a $Arg\ sh\ (x) = log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ *(cours)*

$$lim_{n\to\infty} U_n = \left[log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]_0^1 = log\left(1+\sqrt{2}\right) - log\left(\sqrt{1}\right)$$

$$lim_{n\to\infty} U_n = log\left(1+\sqrt{2}\right)$$

4/ *On a* $V_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1^2 n}} + \frac{2}{\sqrt[3]{n^3+2^2 n}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt[3]{n^3+n^2 n}}\right)$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^3\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)}} + \frac{2}{\sqrt[3]{n^3\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt[3]{n^3\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)}}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n\sqrt[3]{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}} + \frac{2}{n\sqrt[3]{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}} + \cdots + \frac{n}{n\sqrt[3]{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right)$$

x

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt[3]{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}} + \frac{\frac{2}{n}}{\sqrt[3]{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}} + \cdots + \frac{\frac{n}{n}}{\sqrt[3]{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right)$$

$\frac{b-a}{n}$ $\qquad x$

C'est la somme de Riemann Relative à la fonction $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{\sqrt{1+x^2}}}$ *et*

La subdivision $\sigma_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}\right\}$

$f(x)$ *Est continue sur* $[0,1]$

$$lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{\sqrt{1+x^2}}} = \int_0^1 \frac{xdx}{(1+x^2)^{1/3}}$$

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(1+x^2)^{1/3}} = \int_0^1 x(1+x^2)^{-1/3}$$

On pose $\quad U = 1 + x^2 \;\rightarrow\; dU = 2xdx \quad$ *et* $\; U = 1 + x^2 \;\rightarrow\; x = \sqrt{U-1}$

Les bornes $\begin{cases} x = 0 & \rightarrow U = 1 \\ x = 1 & \rightarrow U = 2 \end{cases}$ $\quad ; dU = 2xdx \quad \rightarrow dx = \frac{dU}{2x} = \frac{dU}{2\sqrt{U-1}}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{xdx}{(1+x^2)^{1/3}} = \int_1^2 \frac{\sqrt{U-1}\,dU}{2\sqrt{U-1}.U^{1/3}} = \int_1^2 \frac{dU}{2U^{1/3}} = \frac{1}{2}\int_1^2 U^{\frac{1}{3}}\,dU$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{-1}{3}\right)} U^{1+\left(-1/3\right)}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}U^{2/3}\right]_1^2$$

$$= \frac{3}{4}\left(2^{2/3} - 1^{2/3}\right)$$

$$= \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{4} - 1\right)$$

D'où $\qquad lim_{n\to\infty} V_n = \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{4} - 1\right)$

5/ la valeur moyenne d'une fonction f *sur* $[a, b]$ *est le nombre* $c = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

On a donc :

i/ $\; c_1 = \frac{1}{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x\, dx \;=\; \frac{6}{\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x}\; dx$

On pose $\cos x = U \ \rightarrow dU = -\sin x\, dx \ \rightarrow dx = \frac{-dU}{\sin x}$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \ \rightarrow U = \cos\frac{\pi}{3} = {}^{1}/_{2} \\ x = \frac{\pi}{6} \ \rightarrow U = \cos\frac{\pi}{6} = {}^{\sqrt{3}}/_{2} \end{cases}$$

U

$$\Rightarrow \ C_1 = \frac{\pi}{6}\int_{\sqrt{3}/2}^{1/2} \frac{-\sin x\, dx}{\sin x . U} = \frac{\pi}{2}\int_{\sqrt{3}/2}^{1/2} -\frac{dU}{U} = -\frac{6}{\pi}\,[\ln U]_{\sqrt{3}/2}^{1/2}$$

$$\Rightarrow \ C_1 = -\frac{6}{\pi}\left(\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{6}{\pi}\left(\ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \ C_1 = \frac{6}{\pi}\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2} * 2\right) = \frac{6}{\pi}\ln\sqrt{3}$$

<u>L'intégration par changement de variable</u>

Exemple : $I = \int_{x=0}^{x=1} \frac{2x\, dx}{1+x^2}$

On pose $U = 1 + x^2 \quad \rightarrow \quad dU = d(1+x^2) = 2x\, dx$

$\Rightarrow \ x = \sqrt{U-1}$

$dU = 2x\, dx \quad$ *Avec* $\quad x = \sqrt{U-1} \ \rightarrow \ dx = \frac{dU}{2x} = \frac{dU}{2\sqrt{U-1}}$

Les bornes $\begin{cases} x = 0 \ \rightarrow \ U = 1 + 0^2 = 1 \\ x = 1 \ \rightarrow \ U = 1 + 1^2 = 2 \end{cases}$

Remplaçons dans l'intégral

$$I = \int_{U=0}^{U=1} \frac{2\sqrt{U-1}}{U} * \frac{dU}{2\sqrt{U-1}} = \int_1^2 \frac{dU}{U} = [\ln U]_1^2$$

$$\Rightarrow \ I = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

Integration par partie

<u>Exemple :</u> $J = \int_0^1 x . e^x\, dx$

On a $\begin{cases} U = x \ \rightarrow \ U' = 1 \\ V' = e^x \ \rightarrow \ V = e^x \end{cases}$

$\Rightarrow \ J = [UV]_0^1 - \int_0^1 U'V dx$

$\Rightarrow$ *Donc* $J = [e^x]_0^1 - \int_0^1 1.e^x dx$

$\Rightarrow \ J = (e^1 - 0) - [e^x]_0^1$

$\Rightarrow \ J = e(e^1 - e^0) = e - e + 1 = 1$

Primitive d'une fraction rationnelle

$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, *Si* $g(x)$ *admet des racines donc on décompose en éléments simple sur .*

Exemple : $I = \int \frac{x}{x^2-1}dx$

$h(x) = \frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x+1)(x-1)} = E + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$ *Avec E la partie entière*

$E = lim_{n\to\infty} \frac{x}{x^2-1} = lim_{n\to\infty} \frac{x}{x^2} = 0$

(Si $d°f(x) \leq d°g(x)$ *on utilise la limite. Si non on fait la division euclidienne*

Pour trouver a :

$(x+1)h(x) = \frac{x}{(x-1)} = a + (x+1)\left(\frac{b}{x-1}\right)$

Pour $x = -1 \rightarrow \frac{1}{2} = a + 0 \rightarrow a = {}^{1}/_{2}$

Pour trouver b :

$(x-1)h(x) = \frac{x}{x+1} = (x-1)\frac{a}{(x+1)} + b$

$x = 1 \rightarrow {}^{1}/_{2} = b$

⇨ $\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)}$

⇨ $\int \frac{x\,dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} = \frac{1}{2}ln|x+1| + 1/2\, ln|x-1| + c$

- $J = \int \frac{dx}{x^2+bx+c}$

  Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ => *décomposition en éléments simple sur R*

On a $x^2 + bx + c = x^2 + bx + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} + C = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}$

On pose $\begin{cases} S = x + \frac{b}{2} \rightarrow dS = dz \\ r^2 = c - \frac{b^2}{4} \rightarrow J = \int \frac{ds}{S^2+r^2} = \int \frac{ds}{\left(\frac{s^2}{r^2}+1\right)^2} \end{cases}$

⇨ $J = \frac{1}{r^2}\int \frac{dS}{\left(\frac{S}{r}\right)^2+1} = \frac{1}{r^2}artg\,(S) + c$

Exemple :

Calculer $I = \int \frac{x}{x^2+x+1}dx$

On a $x^2 + x + 1 = x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

⇨ $I = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$

On pose $U = x + \frac{1}{2} \rightarrow dU = dx$

⇨ $I = \int \frac{dU}{U^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{dU}{\frac{3}{4}\left(\frac{44^2}{3}+1\right)} = \frac{4}{3}\int \frac{dU}{\left(\frac{24}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$

On pose $\frac{2}{\sqrt{3}}U = X \rightarrow dX = \frac{2}{\sqrt{3}}dU \rightarrow dU = \frac{\sqrt{3}}{2}dX$

$\Rightarrow\ I = \frac{4}{3}\int \frac{\sqrt{3/2}\,dX}{x^2+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{dX}{1+x^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}Artg(X) + c$

On a $X = \frac{3}{\sqrt{2}}U$ *et* $U = x + \frac{1}{2} \rightarrow X = \frac{3}{\sqrt{2}}(x+1/2)$

$\Rightarrow\ I = \frac{2\sqrt{3}}{3}Artg\left[\frac{2}{\sqrt{3}}(x+1/2)\right] + c$

Primitives d'une fraction rationnelle en sin et cos.

On pose $U = \cos x \rightarrow dU = -\sin x$

Si ne marche pas, on fait généralement le changement de variable

$t = \tan\frac{x}{2}$ *alors* $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ *et* $dx = \frac{2t}{1+t^2}$

Identités :

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ $\qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

$\sin 2x = 2\cos x \sin x$ $\qquad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos^2 x)$

$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$ $\qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Exemple 1 :

Calculer $I = \int \cos^3 x . \sin 2x\ dx$

On a $\sin 2x = 2\cos x \sin x$

$\Rightarrow\ I = \int 2\cos^4 . \sin x\, dx$

On pose $U = \cos x \rightarrow dU = -\sin x\ dx \rightarrow dx = \frac{-1}{\sin x}dU$

$\Rightarrow\ I = 2\int \cos^4 . \cancel{\sin x} . -\frac{dU}{\cancel{\sin x}}$

$\Rightarrow\ = -2\int U^4 dU = -2\left[\frac{4^5}{5}\right] + c$

Avec $U = \cos x \rightarrow I = -\frac{2}{5}\cos^5 x + c$

Exemple 2 :

Calculer $J = \int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx$

On a $\sin 2x = 2\cos x \sin x \rightarrow I = \int \frac{2\sin x \cos x}{1+\cos^2 x}$

On pose $U = \cos x \rightarrow dU = -\sin x\, dx \rightarrow dx = \frac{-dU}{\sin x}$

$\Rightarrow\ J = 2\int \frac{U.\cancel{\sin x}}{1+U^2}\frac{-dU}{\cancel{\sin x}} = \int \frac{-2U.dU}{1+U^2}$

$On\ pose\ 1+U^2=t \quad \rightarrow \quad dt=2U.dU \quad \rightarrow \quad dU=\frac{dt}{24}=\frac{dt}{2\sqrt{t-1}}$

$\Rightarrow\ 1+U^2=t \quad \rightarrow \quad U=\sqrt{t-1}$

$\Rightarrow\ J=\int\frac{-2\sqrt{t-1}}{t}*\frac{dt}{2\sqrt{t-1}}=\int\frac{-dt}{t}=-\ln t+c$

$Puisque \quad t=1+U^2 \quad et \quad U=\cos x \quad \rightarrow \quad t=1+\cos^2 x$

$Donc \quad J=-\ln(1+\cos^2)+c$

Exemple 3 :

$Calculer \quad I=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+\sin x}$

$On\ pose \begin{cases} t=\tan\frac{x}{2} \quad \rightarrow \quad dx=\frac{2dt}{1}+t^2 \\ \qquad \sin x=\frac{2t}{(1+t^2)} \end{cases}$

$\Rightarrow\ I=\frac{1}{2}\int\frac{2T}{1+t^2}*\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{2dt}{1+t^2}*\frac{1}{\frac{1+t^2+2t}{1+t^2}}$

$\Rightarrow\ I=\int\frac{dt}{t^2+2t+1}=\int\frac{dt}{(1+t)^2}$

$On\ pose \quad 1+t=U \quad \rightarrow \quad dt=dU$

$\Rightarrow\ I=\int\frac{dU}{U^2}=\frac{1}{U}+c$

$On\ a\ U=1+t \quad et \quad t=\tan\frac{x}{2} \quad \rightarrow \quad U=1+\tan\frac{x}{2}$

$Alors \quad I=\frac{1}{1+\tan\frac{x}{2}}+c$

Exemple 4 :

$Calculer\ J=\int\cos^4 x\,dx$

$On\ a \quad \cos^4 x=(\cos^2 x)^2 \quad ,avec\ \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

$\Rightarrow\ \cos^4 x=\frac{1}{4}(1+\cos 2x)^2=\frac{1}{4}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)$

$\Rightarrow\ =\frac{1}{4}(1+2\cos 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 4x))$

$\Rightarrow\ =\frac{1}{4}(1+2\cos 2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x)$

$\Rightarrow\ =\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$

$\Rightarrow\ =\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$

$J=\int(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x)dx$

$=\int\frac{3}{8}dx+\int\frac{1}{2}\cos 2x\,dx+\frac{1}{8}\int\cos 4x\,dx$

$(Avec \quad \int\cos ax\,dx=\frac{1}{a}\sin ax+c \quad)$

$\Rightarrow\ J=\frac{3}{8}x+\frac{1}{2}*\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{8}*\frac{1}{4}\sin 4x+c$

$\Rightarrow \; J = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 4x + c$

Primitive d'une fraction rationnelle en $x$et $\sqrt{ax^2+b+c}$

$I = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{ax^2+b+c}\right)^n}$, avec $\Delta = b^2 - 4ac$

Si $\Delta \geq 0$ on pose $\sqrt{ax^2+b+c}) = (x-\alpha)t$

Ou $\sqrt{ax^2+b+c} = (x-\beta)t$

Avec $\alpha = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $\beta = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Si $\Delta \geq 0$ on pose $\sqrt{ax^2+b+c} = \pm\sqrt{a}\,x \pm t$ Si $a > 0$

Ou bien $\sqrt{ax^2+b+c} = xt \pm \sqrt{c}$ avec $c > 0$ Si $a < 0$

Exemple 1 :

Calculer $J = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+2x+2}}$

On pose $\sqrt{x^2+2x+2} = x+t$

$\Rightarrow$ $\cancel{x^2} + 2x + 2 = (x+t)^2 = \cancel{x^2} + 2xt + t^2$

$\Rightarrow$ $2x - 2xt = t^2 - 2$

$\Rightarrow$ $2x(1-t) = t^2 - 2 \quad \rightarrow \quad x = \frac{t^2-2}{2(1-t)}$

$\Rightarrow$ $x = \frac{1}{2}\frac{t^2-2}{-(t+1)} = -\frac{1}{2}\left(t+1-\frac{1}{t-1}\right)$

$\Rightarrow$ $dx = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{(t-1)^2}\right)dt$

$x + \sqrt{x^2+2x+2} = x + x + t = 2x + t$

$= -\left(t+1-\frac{1}{t-1}\right) + t = -\cancel{t} - 1 + \frac{1}{t-1} + \cancel{t}$

$\Rightarrow$ $J = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+2x+2}} = \int -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{(t-1)^2}dt * \frac{1}{-1+\frac{1}{(t-1)}}\right)$

$\Rightarrow$ $J = -\frac{1}{2}\int \frac{(t-1)^2+1}{(t-1)^2} * \frac{\cancel{(t-1)}}{2-t}\,dt = -\frac{1}{2}\int \frac{(t-1)^2+1}{(t-1)(2-t)}dt$

$\frac{(t-1)^2+1}{(t-1)(2-t)} = \frac{t-1}{(2-t)} + \frac{1}{(t-1)(2-t)}$ ← Décomposition en élément simple

Décomposition en élément simple → $= \frac{t-1}{2-t} - \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t-2} = -1 + \frac{\cancel{1}}{\cancel{2-t}} - \frac{1}{t-1} + \frac{\cancel{1}}{\cancel{t-2}} = -(1 + \frac{1}{t-2})$

$\Rightarrow$ $J = -\frac{1}{2}\int -\left(1+\frac{1}{t-1}\right)dt = \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1}$

⇨ $J = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\ln|t-1| + c = \frac{1}{2}(t + \ln|t-1|) + c$

Avec $\sqrt{x^2+2x+2} = x + t \quad \rightarrow \quad t = \sqrt{x^2+2x+2} - x$

⇨ $J = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+2x+2} - x + \ln\left|\sqrt{x^2+2x+2} - (x+1)\right|\right) + c$

CHIMIE GÉNÉRALE

Extrait de l'examen juin 1979 FSSM

a) Equilibrer la réaction suivante :

$$C6H6 + O2 \rightarrow CO_2 + H_20$$

b) A 25°C, l'enthalpie de combustion d'une mole de benzène liquide (C_6H_6) pour donner de l'eau et du gaz carbonique dans leur état standard est : $\Delta H°_1 = -780{,}98\ {}^{kcal}/_{mole}$. Dans les mêmes conditions, l'enthalpie de combustion d'une mole de benzène gazeux pour donner de l'eau et du gaz carbonique dans leur état standard est : $\Delta H°_2 = -789{,}08\ {}^{kcal}/_{mole}$.

- Quelle l'enthalpie de vaporisation du benzène à 25°C ?

(Juin 1979)

Extrait de l'examen 1980

Un volume de 10 litres de gaz (supposé parfait) est comprimé de façon réversible et isotherme jusqu'à ce qu'il soit réduit au dixième de sa valeur initiale.

La température initiale du système est de 0°C et la pression initiale d'une atmosphère.

a) Calculer le travail mis en jeu pour la décompression.

Indiquer si le gaz fournit ou reçoit du travail.

Données : R= 2 $cal.mol^{-1}.K^{-1}$

b) Quelle est la variation de l'énergie interne du gaz ?

c) Quelle est la quantité de chaleur échangée par le gaz ?

Indiquer si le gaz fournit ou reçoit de la chaleur. Justifier le résultat en 3 lignes au maximum.

d) Quelle est la variation d'entropie du gaz ? Justifier le signe du résultat en 3 lignes maximum.

(Septembre 1980)

Extrait de l'examen juin 1981 FSSM

On introduit un excès de NH_4Cl (s) (dont on négligera le volume) dans un récipient préalablement vidé d'air. Le système est porté à 340°C, température à laquelle on étudie l'équation (1) :

$$NH_4Cl(s) \leftrightarrow NH_3(g) + HCL(g) \qquad (1)$$

La pression P à l'intérieur du récipient à l'équilibre, à 340°C, est $P = 1\ atm$.

1) On se propose de changer la température du système, tout en conservant l'état d'équilibre du système. Montrer qu'à chaque température correspond une seule pression d'équilibre, parfaitement déterminée.
2) Quelle sera la valeur de la constante d'équilibre K_P, à 340°C, pour l'équilibre (1) ?
3) Les valeurs des enthalpies libres molaires (à 340°C et sous une atmosphère) de NH_3(g) et HCL(g) sont respectivement, $+1{,}5\ kcal/mole$ et $-22{,}0\ kcal/mole$. Calculer la valeur de l'ethalpie libre molaire de NH_4CL à 340°C et 1 atmosphère.

(Juin 1981)

Extrait de l'examen juin 1982 FSSM

I- On considère l'équilibre (A) :

$$CaCO_3(s) \leftrightarrow CaO(s) + CO_2(g) \qquad \text{(A)}$$

Le tableau suivant donne les enthalpies libres standards $\Delta G°_{298}$ (exprimées en $kcal/mole$), les enthalpies standards $\Delta H°_{298}$ (exprimées en $kcal/mole$), ainsi que les entropies standards $\Delta S°_{298}$ (exprimées en $cal.k/mole$) pour les 3 corps ci-dessus :

Corps	$\Delta G°_{298}\ {kcal}/{mole}$	$\Delta H°_{298}\ {kcal}/{mole}$	$\Delta S°_{298}\ {cal}/{mole.K}$
$CaCO\ 3\ (s)$	-269,80	-288,50	22,20
$CaO\ (s)$	-144,40	-151,80	9,50
$CO2(g)$	-94,25	-94,05	51,06

On admettra, tout au long de ce problème, que l'enthalpie de la réaction dans le sens 1, ainsi que l'entropie de la réaction dans le sens 1, ne dépendent pas de la température.

1) Calculer la valeur de l'enthalpie libre de la réaction dans le sens 1. La réaction dans le sens 1, aura-t-elle lieu de façon spontanée à 298K ?
2) Calculer la valeur de l'enthalpie de la réaction dans le sens 1, à 298K. En faisant un raisonnement clair et ne dépassant pas 3 lignes, indiquer si une augmentation de la température déplace l'équilibre dans le sens 1ou dans le sens 2.(une réponse mettant en jeu des équations sera considérée fausse)
3) Calculer la valeur de la constante d'équilibre K_p pour l'équilibre (A) à 839°C.
   On donne : $\mathrm{R} = 0{,}082\ \mathrm{atm.l.}deg^{-1}.mole^{-1}$.
4) On introduit dans un ballon de 10 l, préalablement vidé d'air, 280,0 g d'oxyde de calcium solide ainsi que 22 g de CO_2 gazeux. Cette opération a lieu à 0°C. On porte le système à 839°C et on laisse l'équilibre s'établir.
   a. Quelle sera la pression du système à l'équilibre ?
   b. Quelle seront les masses respectives de $CaO\ (s)$ et $CaCO3\ (s)$ à l'équilibre ?

   Masses atomiques : $(Ca:\ 40);\ (C:\ 12);\ (O:16)$

On négligera le volume des corps solides par rapport à celui des gaz.

On considère que le volume du récipient n'est pas affecté par le changement de la température.

II.

1. L'oxydation du méthane par la vapeur d'eau s'accompagne par une chaleur de réaction que l'on écrit, pour simplifier : ΔH_1 :

$$CH_4(g) + H_2O\ (g) \rightarrow CO(g) + 3H_2(g)$$

Déterminer ΔH_1 à partir des données suivantes : chaleur d'oxydation partielle du méthane en monoxyde de carbone :

$$CH_4 + \frac{1}{2}O_2 \rightarrow CO + 2H_2$$

$\Delta H_2 = -8{,}50\ Kcal$

L'enthalpie de formation de l'eau vapeur :

$\Delta H_3 = -53{,}00\ Kcal.mole^{-1}$

2) Dans un ballon, à 25°C, on introduit 2g d'un gaz A ; 12g d'azote gazeux et 18g d'un gaz B. La masse volumique du mélange est égale à 3,2 $g.l^{-1}$ et la pression est de 6,238 atm. On indique également la pression partielle de A : 2,439 atm.

On demande le nombre de moles de gaz A et la pression partielle du gaz B (masse atomique de l'azote = 14).

3) Une mole de vapeur se transforme en eau à 100°C, sous 1 atm. La chaleur latente de vaporisation de l'eau, à 100°C et 1 atm, est de 540 cal/g. On considère que la vapeur se comporte comme un gaz parfait, et que le volume molaire du liquide est négligeable devant celui du gaz. On demande de calculer :

$$W, Q, \Delta H, et\ \Delta U$$

Au cours de cette transformation.(masse molaire de l'eau = 18).

$$R = 0{,}082\ atm.l.mole^{-1}\ ou\ 2\ cal.K^{-1}.mole^{-1}$$

(Juin 1982)

Extrait de l'examen Mai 1984 FSSM

On considère l'équilibre suivant, où les gaz sont supposés parfaits :

$$Cl_2(g) + 3F_2(g) \leftrightarrow 2ClF_3(g)$$

On demande :

1) L'enthalpie standard de la réaction, à 25°C
2) La variation de l'énergie interne du système au cours de la réaction, dans les conditions standard, à 25°C
3) L'enthalpie standard de la réaction à 300 °C
4) La valeur de l'enthalpie libre standard de la réaction, à 25°C
5) La valeur de la constante d'équilibre, a 25°C
6) La géométrie de ClF_3 (utiliser les règles de Gillespie)
On donne :

$\Delta H^{\circ}_{f,298,ClF_3(g)} = -38{,}8\ kcal.mole^{-1}; \Delta S^{\circ}_{298}\ de\ la\ réaction = \ -65\ cal.k^{-1}$

$C^{\circ}_{P,Cl_2} = 8{,}77\ cal.k^{-1}.mole^{-1}; C^{\circ}_{P,F_2} = 8{,}94\ cal.k^{-1}.mole^{-1};$

$C^{\circ}_{P,ClF_3} = 22{,}1\ cal.k^{-1}.mole^{-1};$

$constantedesgazparfaits, R = 2cal.K^{-1}.mole^{-1}.$

(Mai 1984)

Extrait de l'examen juin 1984 FSSM

1) Déterminer l'enthalpie de formation $\Delta \boldsymbol{H}^{\circ}_{\boldsymbol{f}}$ du benzène liquide à partir du carbone graphite et de l'hydrogène gaz :

$$6C_{graphite} + 3H_{2gaz}6 \rightarrow C_6H_{6liquide} \qquad \Delta H^{\circ}_{f}?$$

Sachant que pour la réaction de combustion :

$$C_6H_{6liquide} + \frac{15}{2}O_{2gaz} \rightarrow 6CO_{2gaz} + 3H_2O_{liquide}$$

On a$\Delta H^{\circ} = -780,98Kcal.mol^{-1}$ et que $\Delta H^{\circ}_{f,CO_{2gaz}} = \ -94,05Kcal.mole\hat{}-1$ et

$$\Delta H^{\circ}_{fH_2Oliquide} = \ -68,32Kcal.mol^{-1}$$

2) Ecrire deux formules de Lewis possibles pour le benzène.

En déduire la géométrie de cette molécule ainsi que l'état d'hybridation du carbone.

3) Soit la réaction d'hybridation :

$$C_6H_{6gaz} + 3H_{2gaz} \rightarrow C_6H_{12gaz} \qquad \Delta H^{\circ}\ ?$$

a. Calculer la valeur de $\Delta \boldsymbol{H}^{\circ}$ sachant que l'énergie de liaison est de 103kcal pour $\boldsymbol{H-H}$, 145 kcal pour $\boldsymbol{C=C}$, 80 kcal pour $\boldsymbol{C-C}$ et 98 kcal pour $\boldsymbol{C-H}$.

On rappelle que l'énergie de liaison $\boldsymbol{E_{X-Y}}$ est la variation d'enthalpie qui correspond à la réaction :

$$X - Y(g) \rightarrow X(g) + Y(g)$$

b. En réalité, la valeur mesurée expérimentalement pour $\Delta H°$ est de -49 kcal/mol. Comment expliquer cette différence si l'on ne tient pas compte de l'imprécision de la méthode et des erreurs expérimentales.

Remarque : toutes les enthalpies sont données pour T = 298 K.

(juin 1984)

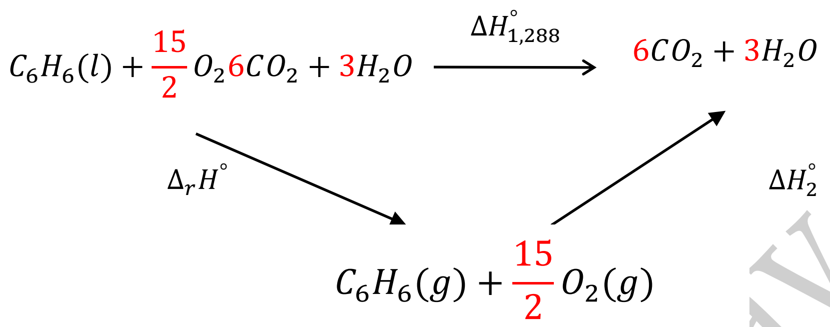
Corrigées

Exercice 1 : (extrait du contrôle juin 1979_faculté des sciences Semlalia)

a) La rection de combustion benzène sécurit :

$$C_6H_6 + \frac{15}{2}O_2 \rightarrow 6CO_2 + 3H_2O$$

b) L'enthalpie de vaporisation du $C_6H_6\Delta_vH^\circ_{289}$ peut être conclure a partir du cycle suivant :



On déduit$\Delta H^\circ_r = \Delta H^\circ_1 + \Delta H^\circ_2$

AN : $\Delta H^\circ_r = -780{,}98 - (-789{,}08) = 8{,}10 Kcal/mol$

Exercice 2 : (extrait du contrôle septembre 1980_faculté des sciences Semlalia)

On a le gaz supposé parfait $\rightarrow$ *deux etat* :

- Etat initiale (avant la compression)$P_1 = 1atm$; $V_1 = 10\ L$; $T_1 = T = 273K$
- Etat final (après la compression) $P_2 = ?$; $V_2 = \frac{V_1}{10} = 1L$; $T_2 = T = 273K$

a) Lors de la compression on a $\delta W = -P_{ext}dV$

On a la transformation réversible

$\Rightarrow P_{ext} = P(P\ pression\ interne\ du\ gaz\ parfait) \rightarrow \delta W = -PdV$

$$\Rightarrow W = -\int_{V_1}^{V_2} PdV \left(GP \Rightarrow PV = nRT \Rightarrow P = \frac{nRT}{V}\right)$$

$$= -\int_{V_1}^{V_2} nRT\frac{dV}{V} = -nRT\ln\frac{V_2}{V_1}$$

Loi des gaz parfait applique au gaz à l'état initial

$$P_1V_1 = nRT$$

D'on $W = -P_1V_1\ln\frac{V_2}{V_1}$ $AN : P = 1atm = 1{,}013.10^5\text{Pa}, V = 10L$

$$W = 2332{,}52\ \text{J} = 2.332kJ > 0 \rightarrow le\ systeme\ recois\ du\ travail$$

b) On a gaz parfait $\rightarrow l'energieinterne\ ne\ du\ systeme\ ne\ depond\ que\ de\ la\ tempetature$

$\rightarrow \Delta U = nC_V\Delta T, C_V: capacité\ calorifique\ molaire\ du\ gaz$

On a une transformation isotherme $\rightarrow \Delta U = 0\ (car\ dT = 0)$

c) 1er principe de la thermodynamique $\rightarrow \Delta U = Q + W.$

$\rightarrow Q = -W = -2332{,}52J$

Au cours de compression, le gaz reçois du travail et en contre il fournit la même quantité de chaleur $(Q = -W)$.

d) On a une transformation réversible, $dS = \frac{\delta Q_{rév}}{T}$ Puisque $T = cste$

$$\rightarrow \Delta S = \frac{Q}{T} \rightarrow AN: T = 273K, Q = -2332{,}52\,J$$

$$\rightarrow \Delta S = -8{,}54JK^{-1}$$

$\Delta S < 0$ L'enthalpie de système diminue au cours de la transformation $\rightarrow$ *le desordre* ↘
Gaz à l'état initial est moins ordonné que l'état final.

Exercice 3 : (extrait du contrôle juin 1981_faculté des sciences Semlalia)

La dissociation de $NH_4\,U(s)$: $CH_3Cl(s) \rightleftharpoons NH_3(g) + HCl(g)$ (1)

1) Pour montrer qu'a chaque température, il existe une seule valeur de pression pour laquelle est conservé, il faut que le système soit monovalent $\Rightarrow$variance du système = 1

$V = F - F$

$$F = \begin{cases} T \\ P_{total} \\ P_{NH_3}, P_{HCl} \end{cases}$$

F: Le nombre de facteur d'équilibre
R: Est le nombre de réaction entre

facteur $K_P = P_{NH_3}.P_{HCl}$, $P_{total} = P_{NH_3} + P_{HCl}$

et $P_{NH_3} = P_{HCl}$

$P_{NH_3} = P_{HCl}$ Car l'équilibre est obtenu a partir de $NH_4\,U(s)$ pur

On a $F = 4$ et $R = 3$ $\Rightarrow V = 1$

$$\Longrightarrow \textit{le systeme est donc bien monovariant}$$

2) La constante $K_P = \frac{P_{NH_3}.P_{HCl}}{P_{NH_3Cl}}$avec $P_{NH_3} + P_{HCl} = P$

Et $P_{NH_3} = P_{HCl} = \frac{P}{2}$

Donc $K_P = \frac{P^2}{4}$AN : $K_P = 0.25\;atm^2$

3) La variation d'enthalpie libre $\Delta G°$ *de la reaction* (1) a 613K s'exprime en fonction des enthalpies libre molaire de formation $\Delta G_{NH_{3(g)}}, \Delta G_{HCl(g)}, \Delta G_{NH_3Cl(s)}$par : $\Delta G° = \Delta G_{NH_3} + \Delta G_{HCl} - \Delta G_{NH_3Cl}$
On a la condition d'équilibre : $\Delta G° = -RT \ln K_p$.
On déduit que : $\Delta G_{NH_3Cl(s)} = \Delta G_{NH_{3(g)}} + \Delta G_{HCl(g)} - RT \ln K_p$ $\Longrightarrow$AN / : $T = 613K$; $R = 2cal.mol^{-1}.K^{-1}$

On trouve : $\Delta G_{NH_3Cl(s)} = -22{,}2\;kcal/mol$.

Exercice 4 : (extrait du contrôle juin 1982_faculté des sciences Semlalia)

I.1°).

1) La variation d'enthalpie libre ΔG°_{298}de la réaction (A) dans le sens 1 peut être calculée de deux manières suivantes :

$$\Delta G^{\circ}_{298} = \sum \Delta G^{\circ}_{f,289}\,(produit) - \sum \Delta G^{\circ}_{f,298}\,(reactifs)$$

$\Delta G^{\circ}_{f,298}$: L'enthalpie libre de formation standard.

Donc $\Delta G^{\circ}_{298} = \Delta G^{\circ}_{f,298}(CO_{2(g)}) + \Delta G^{\circ}_{f,298}(CaO_{(s)}) - \Delta G^{\circ}_{f,298}\left(CaCO_{3(s)}\right)$

AN : $\Delta G^{\circ}_{298} = 31{,}15\ Kcal > 0$

$\Delta G^{\circ}_{f,298} > O \Longrightarrow La\ reaction$ (A) ne peut pas avoir lieu spontanément a 298K dans le sens 1

2) La variation d'enthalpie standard ΔH°_{298} de la réaction (A) dans le sens 1 peut être calculée de même façon queΔG°_{298}

$$\Delta H^{\circ}_{298} = \Delta H^{\circ}_{f,298}(CO_{2(g)}) + \Delta H^{\circ}_{f,298}(CaO_{(s)}) - \Delta H^{\circ}_{f,298}\left(CaCO_{3(s)}\right)$$

$AN:\ \Delta H^{\circ}_{298} = 42{,}65Kcal$

La réaction (A) est exothermique dans le sens 1, car ΔH°_{298} est positive, une augmentation de température déplace, dont l'équilibre dans le sens endothermique (sens2).

3) La constante $K_P(T)$ de l'équilibre (A) dans le sens 1 a la température $T = 1112K\ est\ donnee\ par\ la\ relation$

$$\Delta G^{\circ}_{T} = -RT\ln K_P(T)$$

D'autre part : $\Delta G^{\circ}_{T} = \Delta H^{\circ}_{T} - T\Delta S^{\circ}_{T}$

$\Delta H^{\circ}_{T}\ et\ \Delta G^{\circ}_{T}$Nedépondent pas de la température, donc $\Delta G^{\circ}_{T} = \Delta H^{\circ}_{298} - T\Delta S^{\circ}_{298}$ d'où l'expression de $K_P(T)$

$$K_P(T) = \exp\left(-\frac{\Delta H^{\circ}_{298}}{RT} + \frac{\Delta S^{\circ}_{298}}{R}\right)$$

$AN: \Delta S^{\circ}_{298} = 38{,}36.10^{-1}Kcal.mol^{-1}.K^{-1}$

$K_P(1112K) = 1atm$

4) Le système est caractérisé par les deux états :

Etat initiale	Etat finale
$V = 10L$	$V = 10L$
$T_1 = 273K$	$T_2 = 1112K$
$nCO_2 = \frac{mCO_2}{MCO_2} = \frac{22}{44} = 0{,}5mol$	$n' = \frac{m'CO_2}{MCO_2}$
$nCaO = \frac{mCaO}{MCaO} = \frac{280}{56} = 5mol$	$n' = \frac{m'CaO}{MCaO}$

L'état final du système se caractérise par la présence de $CaO, CO_2\ etCaCO_3$ en équilibre suivant la relation

$$CaO_{(s)} + CO_{2(g)} \rightleftharpoons CaCO_{3(s)}$$

$$\Longrightarrow K'_P = \frac{1}{K_P(T_2)} = \frac{1}{P_{CO_2}}\ ;\ P_{CO_2} est\ la\ pression\ de\ CO_2$$

a) La pression du système a l'équilibre est égale a $P_{CO_2}; P = P_{CO_2} = K_P(T_2)$

AN : $K_P(T_2) = 1atm$ donc $P = 1atm$

b) Las masses $m'CAO$ de $CaO_{(S)}$ et $m'CaCO_3$ de $CaCO_3$seront calculées une fois leur nombre de moles respectif $n'CaO\ et\ n'CaCO_3 determiné$.

$$CaO_{(s)} \quad + \quad CO_{2(g)} \quad \rightleftharpoons \quad CaCO_{3(s)}$$

$$nCaO - x \qquad nCO_2 - x \qquad x$$

L'application de la loi des gaz parfait du (CO_2)

$$\Rightarrow x = n_{co_2} - \frac{P_{CO_2}.V}{RT_2}$$

$AN: x = 0{,}35mol.$

On en déduit que :

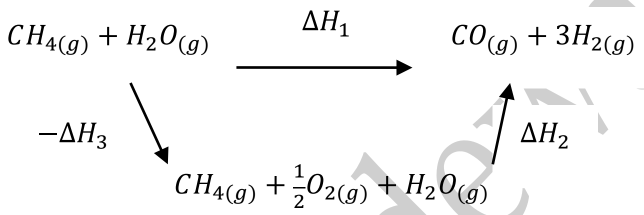
$$m'_{CaO} = n'_{CaO}.M_{CaO} = (n_{CaO} - x).M_{CaO}\ et\ m'_{CaCO_3} = n'_{CaCO_3}.M_{CaCO_3} = (x.M_{CaCO_3})$$

AN : $M_{CaO} = 56\ g/mol$ et $M_{CaCO_3} = 100g/mol.$

$m'_{CaO} = 258{,}2g$; $m'_{CaCO_3} = 39g$

1)

1. La chaleur de la réaction ΔH_1 peut calculée à partir du sycle.



$\Delta H_1 = \Delta H_2 - \Delta H_3$AN:$\Delta H_1 = 48{,}50Kcal$

2. Dans le tableau ci-dessous on regroupe les données relatives au système formé par mélange gazeux, contenu dans le ballon de volume V et porté à la température $T = 298$

Nature du gaz	A	B	N_2	$Mélange\ (A + B + N_2)$
Masse (g)	$m_A = 2$	$m_B = 18$	$m_{N_2} = 12$	$m = 32$
Pression (atm)	$P_A = 2{,}439$	$P_B = ?$	$P_{N_2} = ?$	$P = 6{,}238$
Nombre de mole	$n_A = ?$	$n_B = ?$	$n_{N_2} = 0{,}429$	$n = ?$

L'équation d'état des gaz parfait appliquée au gaz A dans le mélange donne : $n_A = \frac{P_A V}{RT}$(I)

Sachant que la masse volumique $\rho = \frac{m}{v}$

On déduit : $n_A = \frac{P_A.m}{RT.\rho}$

AN:$R = 0.082\ atm.l.mol^{-1}K^{-1}.\rho = 8{,}2g/l$

On trouve $n_A = 1mol.$

La pression partielle du gaz B est la pression qu'il exercerait s'il occupait font le volume à lui seul, donc :

$P_B = n_B \frac{RT}{V}$ (II)

D'après la relation (I) on a :$\frac{RT}{V} = \frac{P_A}{N_A}$

Donc $P_B = n_B \frac{P_A}{n_A}$

En appliquant la loi des gaz parfait au mélange gazeux on obtient $n = \frac{PV}{RT} = \frac{\rho}{P_A}.n_A$

D'autre part : $n_B = n - n_A - n_{N_2}$

$\Rightarrow P_B = P - P_A(1 + \frac{n_{N_2}}{n_A})$

Remarque : le même résultat peut être obtenu en partant de la relation $P = P_A + P_B + P_{N_2}$

Avec$P_B = n_B.\frac{P_A}{n_A}$ et $P_{N_2} = n_{N_2}\frac{P_A}{n_A}$; $P_B = 2{,}753atm$

3. $H_2O_{(g)} \rightarrow H_2O_{(l)}$

Le travail mis en jeu au cours cette transformation effectuer sous la pression P et a la température T s'exprime par : $W = -P_{ext}(V_1 - V_g)$

Le volume molaire V_1est négligeable devant celui du gaz V_g et $P_{ext} = P \Rightarrow W \approx PV_g$

Donc $W = RT$; $AN{:}T = 373K, R = 2cal.K^{-1}.mol^{-1}$

$$W = 746cal = 8118{,}28J$$

La quantité de chaleur accompagnéeà la réaction 1 est Q = −LV

AN:$Q = 18 * 450 = -9720cal.$

On $P = cste \Longrightarrow \Delta H = Q_P = -9720cal.$

$1^{er} principe\ on\ a\ \ \Delta U = Q + W$

AN : $\Delta U = -8574cal$

Remarque : on peut obtenu la même valeur en utilisant la relation

$$\Delta H = \Delta H + \Delta(P.V)$$

Exercice 5 : (extrait du contrôle mai 1984_faculté des sciences Semlalia)

1) La variation de l'enthalpie standard $\Delta_r H^\circ_{298}$la réaction
$Cl_{2(g)} + 3F_{2(g)} \rightleftharpoons 2ClF_{3(g)}$ (1)

Est égale a 2 $\Delta_f H^\circ_{298}(ClF_{3(g)})$, car les enthalpies de formation des molécules Cl_2 $_{et}$ F_2sont nulle

$$\Delta_r H^\circ_{298} = 2\Delta_f H^\circ_{298(ClF_{3(g)})} - \Delta_f H^\circ_{298(Cl_{2(g)})} - 3\Delta_f H^\circ_{298(F_{2(g)})}$$

AN : $\Delta_r H^\circ_{298} = -77.6Kcal$

2) La variation de l'énergie est fixe, et les gaz sont supposés parfait; $\Delta(PV) = \Delta nRT$
$\Delta n : la\ difference\ entre\ les\ nombres\ finale\ et\ intial\ des\ moles\ gazeues.$
D'où $\Delta U = \Delta H - \Delta nRT$
AN: $\Delta n = -2; R = 2.10^{-10}Kcal.mol^{-1}K^{-1}$
Et dans les conditions standard $(P = 1atm, T = 298K)$; $\Delta H = \Delta H^\circ_{298}$
$\Longrightarrow \Delta U = -76.4kcal$

3) Relation de Kirchhoff :

$$\Delta H^\circ_{573} = \Delta H^\circ_{298} = \Delta H^\circ_{298} + \int_{T_1=298}^{T_2=773} \Delta C^\circ_P \, dt$$

Avec $\Delta C^\circ_P = 2C_p(ClF_3) - 3C_p(F_2) - 3C^\circ_p, Cl_2 (constante\ entre\ T_1 et T_2)$

Donc $\Delta H^\circ_{573} = \Delta H^\circ_{298} + \Delta C^\circ_P(T_2 - T_1)$

AN : $\Delta C^\circ_P = 8{,}61.10^{-3} Kcal.K^{-1}.mol^{-1}$

$\Longrightarrow \Delta H^\circ_{573} = -75{,}2Kcal$

4) La variation d'enthalpie libre ΔG:

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S$$

A $P = atm$;$T = 298K \Longrightarrow \Delta G = \Delta G^\circ_{298};\ \Delta H = \Delta H^\circ_{298} = -77{,}6kcal\ et\ \Delta S = \Delta S^\circ_{298} = -65.10^{-3} kcal\ K^{-1}$

On trouve $\Delta G^\circ_{298} = -58{,}2kcal.$

5) La variation d'enthalpie libre ΔG_Ta la température T de la réaction (1) est :

$$\Delta G_T = \Delta G^\circ_T + RT \ln \frac{P^2_{ClF_3}}{P^3_{F_2}.P_{Cl_2}}$$

P_{ClF_3}, P_{F_2} ,P_{Cl_2} Pression partielle de ClF_3 ,F_2 et Cl_2.

A l'équilibre $\Delta G = 0$ donc $\Delta G_T = -RT \ln K_P$ avec

$K_P = \frac{P^2_{ClF_3}}{P^3_{F_2}.P_{Cl_2}}$ Constante d'équilibre de la réaction (1)

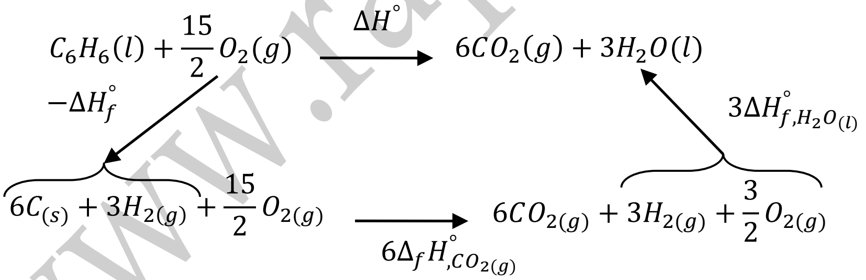
On déduit $K_P = \exp(-\frac{\Delta G^\circ_T}{RT})$

AN : $T = 298,\ \Delta G^\circ_T = \Delta G^\circ_{298} = 58{,}2Kcal \Longrightarrow K_P = 2{,}7.10^{42} atm$

$K_P\ est$Très élevée, $\Longrightarrow$la réaction est totalement dans le sens de formation de ClF_3

Exercice 6 : (extrait du contrôle juin 1984_faculté des sciences Semlalia)

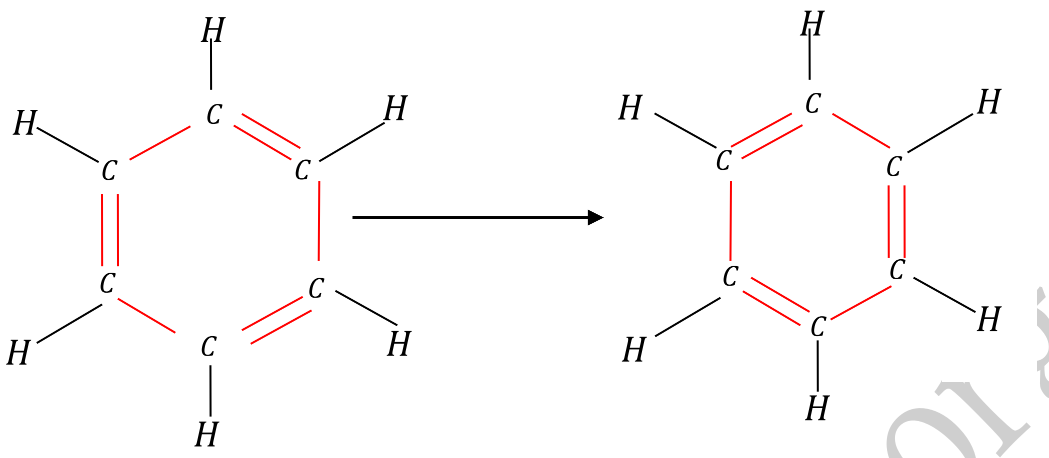
1) L'enthalpie de formation $\Delta_f H^\circ$:



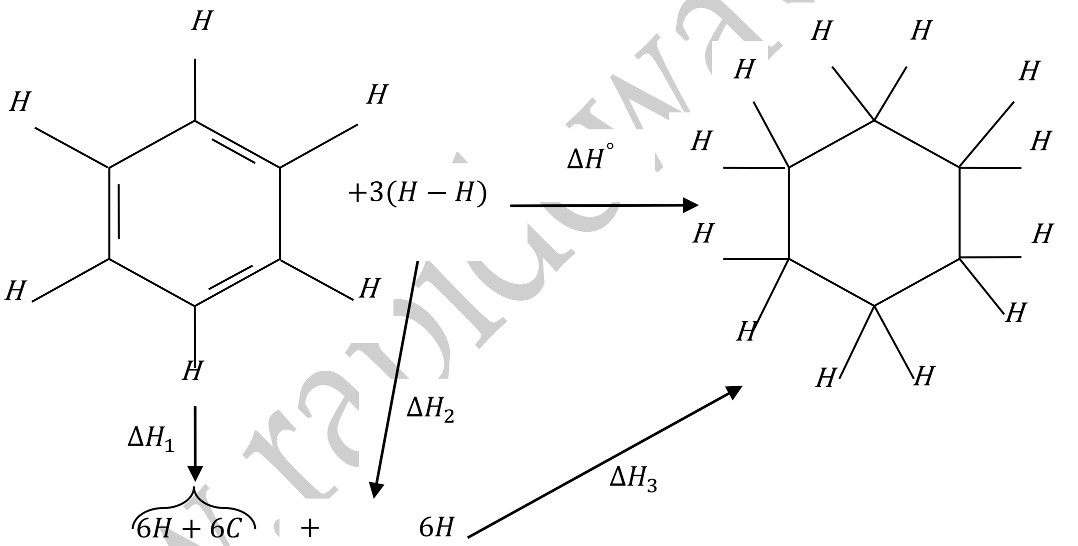
$\Longrightarrow \Delta H^\circ_f = -\Delta H^\circ + 6\Delta H^\circ_{f,CO_2(g)} + 3\Delta H^\circ_{f,H_2O(l)}$

On déduit : $\Delta H^\circ_f = -\Delta H^\circ + 6\Delta H^\circ_{f,CO_2(g)} + 3\Delta H^\circ_{f,H_2O(l)}$

AN : $\Delta H^\circ_f = 11{,}72kcal/mol$



2) –
a)



$\Delta H_1 = 3E_{C=C} + 3E_{C-C} + 6E_{C-H}$

$\Delta H_2 = 3E_{H-H}$

$\Delta H_3 = -(6E_{C-C} + 12E_{C-H})$

$\Delta H^{\circ} = \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3$ Ou $\Delta H^{\circ} = 3E_{C=C} + 3E_{H-H} - 3E_{C-C} - 6E_{C-H}$

AN : $E_{C=C} = 154 kcal/mol$; $E_{H-H} = 103 kcal/mol$

$E_{C-C} = 80 kcal/mol$; $E_{C-H} = 98 kcal/mol$

On trouve : $\Delta H^{\circ} = -84 kcal/mol$